Universidade de Lisboa

A argumentação no estudo do Limite de funções: um estudo com alunos do 11.º ano

Steven Marta da Silva

Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pela Profª Doutora Ana Cláudia Correia Batalha Henriques e coorientado pela Profª Doutora Isabel Maria André Ferreirim

2019

Trabalho desenvolvido no âmbito do Projeto REASON - *Raciocínio Matemático e Formação de Professores*, financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia com a referência PTDC/CED-EDG/28022/2017

FCT
Fundação para a Ciência e a Tecnologia
MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E ENSINO SUPERIOR

Resumo

Este estudo de cariz investigativo foi realizado no âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática, como relatório da prática de ensino supervisionada, no ano letivo 2018/2019, tendo tido como base a lecionação de um conjunto de cinco aulas de 90 minutos, numa turma do 11.º ano de escolaridade, na disciplina de Matemática. Este estudo enquadra-se na unidade didática Limites segundo Heine de funções reais de variável real e o seu objetivo consiste em compreender a argumentação matemática de alunos do 11.º ano na aprendizagem de conceitos e procedimentos envolvidos no estudo exploratório do limite de funções. Mais especificamente, pretendia-se analisar: (1) Como se caracterizam os processos argumentativos usados pelos alunos na resolução de tarefas exploratórias envolvendo o limite de funções? Que dificuldades evidenciam no uso desses processos? (2) Que conhecimentos matemáticos, prévios à unidade didática, são mobilizados pelos alunos nas suas argumentações? (3) Que aprendizagens, relacionadas com o limite de funções, são desenvolvidas pelos alunos? Que dificuldades revelam nessas aprendizagens? O estudo seguiu uma metodologia qualitativa e interpretativa e a recolha de dados fez-se através de: (1) observação participante das aulas lecionadas, com registo áudio e vídeo; (2) recolha documental das produções escritas dos alunos. Da análise dos dados emerge a ideia de que a maioria dos alunos foi capaz de desenvolver processos argumentativos, como a elaboração de justificações e a realização de provas matemáticas, na aprendizagem de conceitos e procedimentos relacionados com o limite de funções. Contudo, apresentaram dificuldades na formulação e justificação de conjeturas e na compreensão dos elementos que devem incluir nos seus argumentos e nos processos de prova, aspetos que causam a falta de rigor e coerência com que apresentam as suas ideias. Na construção dos argumentos, os alunos mobilizaram conhecimentos prévios sobre sucessões e funções reais de variável real que beneficiaram as aprendizagens em torno dos limites. As aprendizagens do conceito de limite foram promovidas com a realização de tarefas de exploração e a construção deste conceito de limite foi fomentada por uma aproximação de natureza intuitiva seguida da aprendizagem da definição de limite segundo Heine. Ainda assim, os alunos evidenciaram insuficiente apropriação dos conceitos e dificuldade em discernir as condições impostas nas definições.

Palavras-chave: Argumentação matemática, Limite de funções segundo Heine, Dificuldades dos alunos, Ensino secundário.

Abstract

This study of an investigative nature was conducted as part of my master program in the teaching of Mathematics as a supervised teaching practice report, during the scholar year of 2018/2019, based on a sequence of five lessons of 90 minute each to a 11th grade mathematics class. This study is framed on the didactic unit Limits of real functions with real variable according to Heine and aims to understand the mathematic argumentation of the 11th grade students in the learning of concepts and procedures involved in the exploratory study of the limit of functions. More specifically, this study intends to analyze: (1) What are the characteristics of the students' argumentative processes when solving exploratory tasks that involved limits of functions? Which difficulties they show in using these processes? (2) Which prior knowledge do students mobilize in their argumentations? (3) Which learnings, related to the limit of functions, the students developed? Which difficulties they reveal in these learnings?

The study follows a qualitative and interpretative methodology and the data collection included: (1) participant observation of the lessons with video and audio recording; (2) Student's written work on the tasks. From the analysis of the data emerges the idea that most students were able of developing argumentative processes, such as the formulation of justifications and mathematical proofs in their learning of concepts and procedures related with the limit of functions. However they presented difficulties in formulating in the justification of their conjectures and in understanding which elements should be included in their arguments and proof procedures, aspects that cause lack of accuracy and coherence in the presentation of their ideas. In the formulation of arguments, the students mobilized previous knowledge relating to successions and real functions of real variable which benefits the learning of limit functions. The learning of limit was promoted through the realization of exploratory tasks and its conceptualization was fomented by an intuitive approach followed by the learning of the formal limit definition according to Heine. Still, the students denoted insufficient appropriation of the concepts and difficulties in identifying the conditions imposed by the definition.

Keywords: Mathematic argumentation, Heine's Limit of functions, Students' difficulties, Secondary education.

Agradecimentos

À minha orientadora, Profª Doutora Ana Henriques, pelo acompanhamento constante, próximo e exigente ao longo de todo o ano e pela sua simpatia.

À minha coorientadora, Prof.ª Doutora Isabel Ferreirim, pela disponibilidade e incentivo e pelas conversas e sugestões de cariz matemático, sempre interessantes.

À minha professora cooperante, Profª Teresa Moreira, pela disponibilidade, paciência e confiança com que sempre me acompanhou e pela sua afabilidade e alegria.

Aos vinte e sete alunos da turma do 11.º ano em que este estudo se desenvolveu, pela cordialidade com que me acolheram e pelo companheirismo demonstrado.

À Profª Doutora Carlota Gonçalves pela confiança e simpatia evidenciadas ao longo de todo o curso de mestrado.

Aos meus pais por fazerem sentir a sua presença com amor e ânimo, sempre que foi necessário.

À minha família, em particular à minha irmã e sobrinhos, pela colaboração inestimável.

Índice geral

Índice de Figuras

Índice de Tabelas

Capítulo 1: Introdução

A unidade didática, na qual se desenvolveu este estudo, diz respeito ao domínio curricular Funções Reais de Variável Real (MEC, 2014) e está relacionada com o estudo do limite, segundo Heine, deste tipo de funções. O estudo foi desenvolvido ao longo de cinco aulas de 90 minutos (dois turnos consecutivos), durante o segundo período do ano letivo de 2018/2019, com uma turma do 11.º ano do curso de Ciências Socioeconómicas, da Escola Secundária de Camões. Este capítulo é dedicado à problemática que deu origem a este estudo, considerando sucintamente quais foram as motivações pessoais e a pertinência do estudo por detrás da sua realização, e à definição do seu objetivo assim como das questões de investigação que serviram para orientar o seu desenvolvimento. No final do capítulo, surge uma secção onde se descreve como foi organizado o estudo.

1.1. Motivações pessoais e relevância do estudo

A minha experiência enquanto explicador de Matemática, sobretudo do Ensino Secundário, tem comprovado que, de forma a atenuar as dificuldades habitualmente associadas ao desempenho matemático, os alunos concebem a atividade em torno desta disciplina como se esta não exigisse, necessariamente, a compreensão de significados nem a apresentação de explicações, justificações e demonstrações. No entanto, a prática de explicador também conduziu à perceção de que a persistente solicitação quer de explicações e justificações orais, durante a resolução de exercícios e problemas matemáticos, quer da apresentação escrita de argumentos coerentes, quando for exigida a justificação de um resultado (ou afirmação) ou a elaboração de conjeturas e de processos de prova, pode produzir resultados bastante positivos tanto ao nível da avaliação de desempenho dos alunos como no desenvolvimento das suas aprendizagens e na mobilização de conhecimentos, procedimentos e conceitos matemáticos.

O desenvolvimento da capacidade argumentativa nos alunos tem sido discutido e investigado pela comunidade matemática por diversos motivos, dos quais podem ser realçados, segundo Douek e Pichat (2003), a necessidade de uma abordagem precoce do processo de prova, a exploração do potencial de interação social no desenvolvimento de conhecimentos e competências matemáticas e a importância das competências argumentativas nos currículos como forma de reforçar a autonomia intelectual nos alunos.

A importância concedida, nos currículos escolares, à relação entre as competências argumentativas e a autonomia intelectual dos alunos pode ser confirmada num dos mais recentes documentos orientadores do sistema educativo português, Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (ME, 2017), no qual são colocados em evidência os princípios e a visão pelos quais se pauta a ação educativa, bem como os valores e as competências, agrupadas em áreas, que tal ação visa desenvolver. Por exemplo, nas orientações relacionadas com a área de Pensamento crítico e pensamento criativo, uma das dez áreas de competências visada no documento, surge explicitado que as competências deste tipo implicam que os alunos sejam capazes de "pensar de modo abrangente e em profundidade, de forma lógica, observando, analisando informação, experiências ou ideias, argumentando com recurso a critérios implícitos ou explícitos, com vista à tomada de posição fundamentada" (ME, 2017, p.24).

Também, no Programa e Metas Curriculares de Matemática A do Ensino Secundário (MEC, 2014), podemos constatar que três dos desempenhos, "a que se atribuem significados específicos e que servem de base à leitura dos descritores elencados nas Metas Curriculares" (p.6), traduzem desempenhos fundamentais em Matemática, que, geralmente, podem ser associados ao exercício argumentativo:

> (2) Reconhecer: O aluno deve apresentar uma argumentação coerente ainda que eventualmente mais informal do que a explicação fornecida pelo professor. Deve, no entanto, saber justificar isoladamente os diversos passos utilizados nessa explicação. (…) (4) Provar/Demonstrar: O aluno deve apresentar uma demonstração matemática tão rigorosa quanto possível. (5) Justificar: O aluno deve justificar de forma simples o enunciado, evocando uma propriedade já conhecida. (MEC, 2014, p.6)

A aquisição e desenvolvimento de conhecimentos bem como de capacidades ou atitudes devem ser considerados como aspetos educativos importantes, devendo ser todos encarados como objetivos essenciais associados à aprendizagem dos conteúdos de cada tema matemático, e ser valorizados com a mesma importância (ME, 2018).

Não obstante a complexidade normalmente associada ao conceito de limite, este é considerado um dos conceitos chave no pensamento matemático avançado, sendo a sua compreensão muito valiosa para os alunos que finalizam o Secundário e um requisito para o sucesso dos alunos no Ensino Superior (Fernández-Plaza, Rico & Ruiz-Hidalgo, 2013).

As dificuldades dos alunos, comumente observadas na aprendizagem de conteúdos que envolvem o limite de funções e na mobilização de conhecimentos relacionados com este conceito durante a resolução de problemas, parecem indiciar que a conceção do conceito de limite de uma função contém fatores ocultos que acabam por entrar em conflito com a respetiva definição formal, prejudicando a compreensão deste conceito (Tall & Vinner, 1981).

A compreensão deste conceito não decorre de uma vez só, a partir da definição do conceito. Os alunos vão formando diferentes imagens mentais do conceito a partir das suas diversas representações, incluindo a definição formal e as conexões estabelecidas entre representações, os conhecimentos prévios mobilizados, as crenças pessoais, a resposta ao contexto, etc. Em grande medida, são as representações (imagens) mentais que acabam por determinar o grau de adequação entre as conceções de limite dos alunos e a definição matemática do conceito (Tall & Vinner, 1981).

Além das dificuldades evidenciadas nas aprendizagens que envolvem limites, muitas das tarefas propostas aos alunos são de caráter fechado e não procuram promover nem o espírito crítico nem o desenvolvimento das capacidades de estabelecer conexões e de argumentar em torno de explicações, justificações ou da criação de conjeturas. Constata-se que, desta maneira, os alunos vão intensificar a compartimentação dos conhecimentos, já que deixam de procurar relações entre conceitos e processos e passam a privilegiar um pensamento de tipo procedimental ou processual em detrimento do concetual, o que torna a mobilização de conhecimentos mais dependente das informações e correções do professor (Demana & Waits, 1992).

De acordo com Veloso (1998, p. 374), os alunos não ficam tão dependentes das orientações dos professores, se forem desafiados e motivados a uma "prática permanente da argumentação em defesa das suas afirmações", pois esta prática contribui para torná-los mais capazes de raciocinar matematicamente e mais conscientes do papel que os processos de justificação e de prova matemática podem desempenhar na compreensão de conceitos matemáticos e das suas propriedades. Se forem incentivados a realizar atividades de formulação e investigação de conjeturas ou atividades que impliquem a construção e avaliação de argumentos, as hipóteses, de os alunos adquirirem uma perspetiva mais sofisticada e poderosa que lhes permita desenvolver uma matemática mais avançada, aumentam bastante (NCTM, 2007).

Dado que a implementação de tarefas de exploração e de discussões coletivas acabam por desafiar os alunos a clarificar as suas ideias e raciocínios, favorecendo o desenvolvimento da capacidade de relacionar, comunicar e argumentar matematicamente, oralmente ou por escrito (Ponte, Boavida, Graça, & Abrantes, 1997), este tipo de tarefas e de discussões foram planificadas e introduzidas, nas aulas em que decorreu o estudo, de modo a criar um contexto que estimulasse os alunos a realizar atividades de argumentação em torno de processos de prova e de justificação.

1.2. Objetivo e questões de estudo

Desta forma, considerei bastante pertinente efetuar um estudo sobre a implicação da capacidade argumentativa dos alunos na aprendizagem do conceito de limite de funções reais de variável real, com o seguinte objetivo: Compreender a argumentação matemática de alunos do 11ºano na aprendizagem de conceitos e procedimentos envolvidos no estudo exploratório do limite de funções.

Atendendo ao objetivo do estudo, uma forma de orientar este estudo passou pela obtenção de respostas para as seguintes questões:

(1) Como se caracterizam os processos argumentativos usados pelos alunos na resolução de tarefas exploratórias envolvendo o limite de funções? Que dificuldades evidenciam no uso desses processos?

(2) Que conhecimentos matemáticos, prévios à unidade didática, são mobilizados pelos alunos nas suas argumentações?

(3) Que aprendizagens, relacionadas com o limite de funções, são realizadas pelos alunos? Que dificuldades revelam nessas aprendizagens?

1.3. Organização do estudo

O relatório da prática de ensino supervisionada, que inclui o estudo de cariz investigativo já apresentado, aparece dividido em seis capítulos. O primeiro capítulo é composto pela introdução, na qual são reveladas a motivação, pertinência e a problemática subjacentes à realização do estudo, assim como o objetivo e as questões de investigação que orientaram a sua elaboração. O segundo capítulo diz respeito ao enquadramento teórico da problemática estudada, sendo constituído por duas secções principais: Argumentação e argumentação matemática; Conceito de limite de uma função. A primeira destas secções surge dividida em cinco subsecções: Algumas considerações históricas sobre argumentação; A noção de argumentação e o modelo de Toulmin; Argumentação numa aula de Matemática; Raciocínio matemático e processos de argumentação; Dificuldades inerentes à atividade de argumentação. Já a segunda secção aparece segmentada em três subsecções: Considerações sobre a aprendizagem do conceito de limite; Construção do conceito de limite; Dificuldades na aprendizagem do conceito de limite. O terceiro capítulo destina-se à apresentação da unidade didática lecionada, contemplando a descrição do contexto escolar e da turma com a qual o estudo de cariz investigativo foi desenvolvido e é realizada a ancoragem da unidade didática no programa de matemática vigente. A ancoragem da unidade surge dividida em seis subsecções: Orientações curriculares; Conceitos matemáticos envolvidos; Recursos e estratégias de ensino; Descrição das tarefas e da questão aula; Avaliação das aprendizagens; Descrição das aulas lecionadas. No quarto capítulo são apresentadas as principais opções metodológicas, os participantes no estudo, os métodos e instrumentos de recolha de dados, os métodos de análise de dados e as questões éticas envolvidas no estudo, constituindo, cada um destes tópicos, as diversas secções que compõem este capítulo. O quinto capítulo apresenta a análise dos dados recolhidos, tendo por base o enquadramento teórico da problemática definida na introdução, o objetivo e as questões de investigação orientadoras do estudo, constituindo, cada uma delas, uma secção de análise. Por fim, no sexto capítulo, apresento uma síntese do estudo, as conclusões do estudo, que contém três secções, e uma reflexão pessoal, onde são discutidos os principais resultados e, ainda, as limitações do estudo, as dificuldades encontradas na sua realização e sugestões para possíveis investigações futuras.

Capítulo 2: Enquadramento teórico da problemática

Tendo como base literatura de referência, mais as orientações curriculares e pedagógicas vigentes no Sistema Educativo português, este capítulo presta-se a fornecer um enquadramento teórico que procura fundamentar o trabalho realizado em sala de aula e a sua análise, tomando em consideração o objetivo do presente estudo.

O presente capítulo aparece, assim, dividido em duas secções. A primeira secção, dedicada à clarificação de noções relacionadas com a temática da argumentação e à consideração de aspetos decorrentes da argumentação matemática em sala de aula, surge segmentada em cinco subsecções com os seguintes títulos: (1) Algumas considerações históricas sobre argumentação; (2) A noção de argumentação e o modelo de Toulmin; (3) Argumentação na aula de Matemática; (4) Raciocínio matemático e processos de argumentação; (5) Dificuldades inerentes à atividade argumentativa. A segunda secção, por sua vez, é destinada à apresentação crítica de algumas das características e dificuldades verificadas na aprendizagem de processos e conceitos envolvidos no estudo do limite de uma função e surge segmentada em três subsecções: (1) Considerações sobre a aprendizagem do conceito de limite; (2) Construção do conceito de limite; (3) Dificuldades na aprendizagem do conceito de limite.

2.1. Argumentação e argumentação matemática

Algumas considerações históricas sobre argumentação

A noção de argumentação, em relação estreita com a noção de retórica, remonta à Grécia Antiga e aos discursos de grandes oradores como Péricles (495/492-429 a.c.) que, no longínquo século V a.C., fizeram a apologia da democracia como regime político mais adequado aos padrões morais e racionais das sociedades ditas civilizadas. Não é de estranhar, portanto, que as primeiras teorizações sobre argumentação tenham sido desenvolvidas ainda nesse século e, principalmente, no século que se seguiu. Baseando-me em Reale (2001), pode considerar-se que Aristóteles (384-322 a.c.) distinguiu três domínios relacionados com o exercício da argumentação: a sofística, a dialética e a analítica. A sofística estava relacionada com os discursos cujo objetivo principal era a persuasão de interlocutores que, com relativa facilidade, aderiam aos argumentos apresentados sem se preocuparem em refletir sobre a coerência do discurso nem em procurar garantias sobre a validade ou a probabilidade de tal argumentação. Já a argumentação de tipo dialético referia-se ao tipo de interação discursiva na qual a validade da argumentação podia ser apreciada pela coerência e sustentabilidade dos argumentos apresentados. A dialética envolvia os processos argumentativos que decorrem do convencimento de interlocutores conscientes quer da problemática em causa quer das intenções do orador e com capacidade para compreender, questionar e refutar os argumentos apresentados.

> O silogismo dialético, segundo Aristóteles, permite-nos discutir e, em especial, determinar, quando discutimos com a gente comum ou com pessoas doutas, quais são os seus pontos de partida e até que ponto elas se acordam com os mesmos nas suas conclusões (…). (Reale, 2001, p.131)

Por conseguinte, o filósofo grego alicerçava a distinção entre dialética e sofística no conhecimento prévio e predisposição para o saber dos interlocutores.

A analítica, por sua vez, visava uma forma específica de racionalidade em que a argumentação não se destinava necessariamente a um auditório físico e a forma do discurso seria de natureza demonstrativa. Para o filósofo grego, a demonstração analítica correspondia a uma forma de estabelecer raciocínios (silogismos) necessariamente válidos. Aristóteles admitia que a validade de certos argumentos podia decorrer independentemente das opiniões dos interlocutores sobre o conteúdo das proposições constituídas como premissas (Perelman, 1993). Isto é, a partir de premissas — proposições que descrevem os antecedentes de um raciocínio — que garantem, por si mesmas, a evidência do seu valor de verdade, o pensamento consegue alcançar, ou inferir, conclusões cuja verdade é necessariamente garantida pelo nexo gerado entre as proposições envolvidas, o que lhe valeu o título de pai da Lógica formal (Perelman, 1993). Apesar das diferenças entre os dois tipos de silogismo, a teoria aristotélica não define nenhum tipo de hierarquia entre a abordagem analítica e a dialética, sendo ambas merecedoras de investigação já que as duas tratam de campos de saber que, embora relacionáveis, apresentam características autónomas. A argumentação dialética decorre de uma maneira de raciocinar que, apesar de não atingir o poder apodítico da verdade alcançada nos processos demonstrativos, não deve ser considerada como um saber inferior. (Reale, 2001).

Depois de Aristóteles, os estoicos preferiram destacar a componente formal da dialética em detrimento da componente argumentativa e procuraram formalizá-la a partir da constituição de vários tipos de argumentos silogísticos, passando a assumir a Retórica como a arte de bem falar. Apesar de não ser consensual, a Retórica era encarada inicialmente como a arte de persuadir ou convencer por meio da palavra e tanto a dialética como a sofística podiam ser consideradas como duas vertentes da retórica aristotélica

(Reboul, 2000). Porém, ao longo do tempo, este termo foi adquirindo um sentido pejorativo devido ao cariz superficial, manipulador e não preocupado com a verdade de muitos dos discursos construídos por oradores e retóricos hábeis, que procuravam persuadir o seu auditório apenas para adquirir benefícios, prestígio ou algum tipo de vantagem, aplicando as suas competências argumentativas para defender e promover as teses — fossem elas quais fossem — que melhor se adequavam aos seus propósitos pouco éticos (Boaventura, 2005). A forte influência que o cristianismo católico exerceu sobre o pensamento filosófico europeu, principalmente até ao século XV, foi determinante para passar a encarar as teorias de argumentação sob o ponto de vista moral, privilegiando a análise silogística através da tipificação de silogismos falaciosos — na época medieval foram catalogados centenas de tipos de silogismos falaciosos.

Mais tarde, o racionalismo, corrente filosófica dominante nos séculos XVII-XVIII, e o positivismo lógico (séculos XIX-XX) passaram a valorizar a abordagem analítica em detrimento da argumentação dialética e da retórica, focando a sua atenção na investigação do raciocínio demonstrativo e no desenvolvimento de linguagens formais que se adequavam ao esclarecimento da estrutura lógica que subjaz ao funcionamento das linguagens naturais na expressão de raciocínios, cálculos e juízos (Boavida, 2005).

Para representar as formas lógicas[1] de frases expressas em linguagem natural e estudar as relações lógicas que estas estabelecem entre si por via da forma lógica, a Lógica formal, do final de século XIX, início de século XX, passou a construir linguagens artificiais — designadas habitualmente por linguagens formais — que se prestavam à tradução das linguagens naturais e, indistintamente, permitiam a sua aplicação a qualquer contexto discursivo (Zilhão 1993). Arrogava-se a querer estudar, na sua máxima generalidade, a verdade das frases e as relações de consistência e de consequência entre estas, o que exigia a eliminação da ambiguidade de sentido e a irradicação da dependência de contexto, normalmente atribuídas às linguagens naturais (Zilhão, 1993).

Porém, não obstante a retórica e, principalmente, a argumentação dialética terem sido votadas ao desprezo até cerca de meados do século XX, verificou-se nesta altura ao recrudescimento da importância de ambas. Aquela visão do mundo, que pretendia excluir, em nome da objetividade científica e da noção de verdade autoevidente, o fator humano

---

[1] A forma lógica de uma frase é aquilo que é especificado quando, por análise lógica, arregimentamos essa frase na notação canónica adequada a uma linguagem formal e substituímos, na frase arregimentada, o vocabulário não lógico por letras esquemáticas correspondentes. Por exemplo, a frase, escrita em português, "Os gatos são mamíferos" poderia ser arregimentada (traduzida em linguagem formal) como $\forall x(x \text{ é } gato \rightarrow x \text{ é } mamífero)$ (Sàágua, 2002).

do conhecimento da natureza e da construção da Ciência, foi alterada, ao ponto de passar a admitir a subjetividade do ser humano como elemento indissociável da sua racionalidade e da possibilidade de entendimento das regras que governam tanto o comportamento linguístico como a interação cultural, sem esquecer o conhecimento científico (Sumares, 1994).

Segundo a perspetiva racionalista do conhecimento, os axiomas da geometria euclidiana eram entendidos como princípios fundados na razão humana, universais, necessários, apriorísticos e evidentes no seu conteúdo, ou seja, independentes da experiência e da relação com os outros e com o mundo. No entanto, uma vez que, ainda no século XIX, ficou provada a possibilidade de geometrias baseadas noutros sistemas axiomáticos (geometrias não euclidianas), a crença na existência de elementos a priori na razão, que podiam ser deduzidos como condições necessárias de toda a experiência possível e de todo o conhecimento humano rotulado como objetivo, tornou-se insustentável (Heinemann, 1993). Isto não significa que a força construtiva e calculista da racionalidade formal tenha passado a ser rejeitada e considerada como ilusória ou como produto de uma ilusão. Significa antes que passou a não ser admissível compreender o conhecimento humano somente como um resultado da racionalidade formal, já que esta surge no espírito humano juntamente com outras facetas (emocional, instintiva, fisiológica, sociocultural) que promovem a experiência do mundo e também acabam por ser determinantes das possibilidades de entendimento lógico (Heinemann, 1993).

Distanciando-se da noção racionalista de verdade e dos esquematismos das linguagens formais, Perelman (1912-1984) e Toulmin (1922-2009), dando continuidade à tendência iniciada pela noção de jogos de linguagem de Wittgenstein (1889-1951), vão sugerir, no final da década de 50, uma nova retórica fundada no verosímil e na importância da persuasão enquanto componente da atividade argumentativa, ao mesmo tempo que procuram abrir caminho para a implementação de uma lógica argumentativa não formal (Breton & Gauthier, 2001). Esta retórica inovadora vai ser constituída no âmbito da argumentação dialética de Aristóteles: contrariamente à lógica formal, portadora de univocidade e afastada dos contextos de uso efetivo das línguas naturais, a argumentação não formal, em vez de rejeitar a ambiguidade das línguas naturais, vai aceitá-la e contar com ela nas suas investigações lógicas, admitindo a possibilidade de um tipo de racionalidade que já não pode evitar o debate como condição inerente à análise dos argumentos que governam as decisões (Meyer, 1982).

Trata-se de nos abrirmos ao múltiplo, de aceitarmos a linguagem natural, não como um obstáculo, mas como o meio através do qual argumentamos, (Plantin, 1990), passando a considerar a possibilidade de decidir a favor desta ou daquela tese a partir de fatores que não envolvem apenas aspetos racionais ou a satisfação de requisitos de certeza, permitindo um novo olhar para a verdade como construção intersubjetiva (Perelman, 1993). A possibilidade de dois seres humanos, ou mais, concordarem sobre um dado facto não implica que esta constatação seja objetiva, mas unicamente que as duas subjetividades estão de acordo. O consenso entre humanos não é, pois, um argumento a favor da objetividade — não forma ou descreve a realidade —, mas mostra que existe possibilidade de acordo entre as formas de perceber e de pensar de todos. Contudo, convém realçar que a importância e força da intersubjetividade como fonte de acordos e consensos depende em última instância de uma base objetiva, ou seja, da convergência das conceções e juízos formulados em cada contexto e, em última análise, entre domínios diferentes (Blanché, 1983).

A noção de argumentação e o modelo de Toulmin

Para Oléron (1996), a argumentação pode ser entendida como um processo, geralmente, discursivo através do qual uma pessoa — ou um grupo — explícita um raciocínio relacionado com determinado assunto e tenta conduzir os seus interlocutores a adotar uma posição recorrendo a apresentações ou asserções — argumentos — que visam mostrar a validade ou fundamento de tais raciocínios. Em consonância com esta perspetiva, a competência argumentativa corresponde à capacidade de dialogar, de pensar, de optar e de se comprometer com os outros (Grácio, 1993).

De forma geral, a argumentação possui uma natureza discursiva, instituindo a linguagem natural como a sua ferramenta mais usual, embora esta característica não exclua a possibilidade de utilização ou de referência a outros elementos não discursivos: figuras, gestos, dados numéricos ou algébricos, entre outros (Douek, 2000). Mas, é possível associar outras dimensões à atividade argumentativa: uma dimensão dialética, já que a validade de uma argumentação é obtida a partir do debate e da negociação, a realizar com e sobre enunciados que se creem verdadeiros, sem exigir que tal verdade decorra necessariamente de uns para outros; uma dimensão social ou comunicacional, pois há que convencer, estabelecer uma relação que, embora racional, não deixe de ser emocional e empática com um auditório, entendendo-se por auditório "o conjunto daqueles que o orador quer influenciar pela sua argumentação" (Perelman, 1993, p. 33); uma dimensão lógica ou racional, que não tem de ser necessariamente dedutiva, porque pode ser estabelecido um processo (lógica informal) de validação e de avaliação da consistência e coerência dos argumentos com base em critérios aceites por todos os agentes envolvidos na argumentação (Pedemonte, 2002); uma dimensão cognitiva, pois o envolvimento em atividades de argumentação permite analisar, deliberar e reconstruir posições, influenciando o desenvolvimento cognitivo; e, uma dimensão epistémica, já que a argumentação se desenvolve em torno de temáticas com caraterísticas próprias e em domínios específicos de conhecimento (Toulmin, 1993).

Apoiando-se nos factos, princípios, opiniões, costumes, valores admitidos por cada auditório, a lógica informal não se preocupa com a verdade abstrata, categórica ou hipotética, mas com a que resulta da adesão a um discurso. Não se trata de mostrar que a verdade passa das premissas para a conclusão, mas que se pode admitir como racional aquilo que um auditório aceita como verdadeiro, seja a partir das teses a que adere ou das justificações com que se compromete (Perelman, 1992).

> a razão não é apenas uma faculdade que, para ser racional, deve engendrar provas necessárias que ninguém pode contestar. A atividade racional não é apenas cálculo (e a isso se reduz, em última análise, a lógica formal), antes se encontra ligada à arte da persuasão, às técnicas discursivas que visam obter a adesão de um auditório. (Grácio, 1993, p.8)

Os argumentos apresentados em apoio de uma tese não têm de a implicar de forma necessária e, por isso, também não têm de ser absolutamente corretos ou incorretos, sendo, em vez disso, mais ou menos fortes, mais ou menos pertinentes, mais ou menos convincentes (Boavida, 2005). Quando apresentamos argumentos, que procuram dotar os enunciados com a força adequada para conduzir o interlocutor às nossas conclusões, é fundamental conhecer as referências e ideias de um auditório, pois, apesar dos factos que compõem os enunciados, as bases da argumentação são sobretudo instituídas a partir daquilo que for reconhecido e aceite como plausível pelo auditório. No entanto, a adesão do auditório pode ser ativa (convencer) ou passiva (persuadir), sendo necessário distinguir o papel de ambas (Perelman, 1993).

> O assentimento é um evento em nosso entendimento que, embora possa repousar sobre fundamentos objetivos, também exige causas subjetivas na mente daquele que julga. Se este juízo é válido para qualquer pessoa, desde que seja dotada de razão, o seu fundamento é objetivamente suficiente e assentir a ele chama-se então convicção. Se ele possui o seu fundamento tão somente na natureza particular do sujeito, então o assentir a ele denomina-se persuasão. (Kant, citado em Alves, 2005, p.116)

Similarmente, Toulmin (1993) refere que a argumentação pode ser entendida como um modo de comunicação baseado na racionalidade que visa a obtenção de acordos através da apresentação de argumentos adequados a cada campo de argumentação. A constituição dos campos de argumentação não está só relacionada com as diferenças existentes entre os conteúdos e as regras características de cada domínio de conhecimento, podendo mesmo acontecer a definição de campos de argumentação interdisciplinares. Ao tornar os cânones regularizadores da atividade argumentativa provenientes das exigências particulares de cada empreendimento racional, o autor vai colocar a validação da argumentação em relação com os seus fins e com as modalidades da sua expressão, além dos critérios próprios de cada contexto temático (Oliveira, 2017).

Considerando os mecanismos argumentativos como procedimentos racionais que, retrospetivamente, procuram sustentar uma conclusão, Toulmin passa a ter razões, segundo Oliveira (2017), para deixar de atribuir exclusividade de análise às articulações lógicas do discurso no sentido formal, transformando a validade já não numa questão relativa à forma, mas num assunto referente ao conteúdo que deve ser decidido com base nos critérios de avaliação adequados a cada caso e ao uso da linguagem em contexto (Oliveira, 2017). Independentemente da natureza da asserção que represente uma conclusão, "é possível questioná-la, exigir que nos forneçam motivos (fundamentos, dados, factos, provas, considerações, características) de que deve depender o valor da asserção" (Toulmin, 1993, p. 14). Ou seja, para Toulmin pode exigir-se uma argumentação que passe a assumir um caráter disputável, temporal e relativo aos critérios de avaliação admissíveis no contexto em que aquela irá decorrer (Oliveira, 2017).

O filósofo assume a irrelevância de definir uma hierarquia entre argumentos que dependa da objetividade da linguagem e da universalidade dos critérios aplicados na sua avaliação, deslocando a racionalidade do âmbito da demonstração para o âmbito da justificação ao introduzir elementos evolutivos (históricos e psicológicos) e contextuais (linguísticos e sociais) na apreciação e descrição daquilo que é usual designar como racional (Oliveira, 2017). Assim, o autor defende que a noção de validade que melhor corresponde ao dinamismo característico da atividade argumentativa não pode ser de tipo formal e teria de ser próxima da noção de validade processual de tipo jurídico (Toulmin, 1993).

Toulmin (1993) vai comparar um argumento a um organismo biológico, passando a descrevê-lo quer a partir de uma abordagem anatómica — correspondente à inquirição de índole pragmática sobre a função do argumento, e dos conceitos aí usados, num dado campo de argumentação — quer de uma abordagem fisiológica — correspondente à análise da microestrutura do argumento através da descrição dos elementos que o constituem, como se de órgãos se tratassem, e da investigação sobre as relações estabelecidas —, sem esquecer que "a presença desses órgãos no organismo encontra-se em permanente relação com a sua estrutura anatómica maior" (Oliveira, 2017 p.35). A análise de tipo fisiológico levou à construção de um modelo esquemático, apresentado na Figura 1, que representa a estrutura de um argumento e onde é desenhada a articulação e distinção dos diferentes elementos que compõem um argumento.

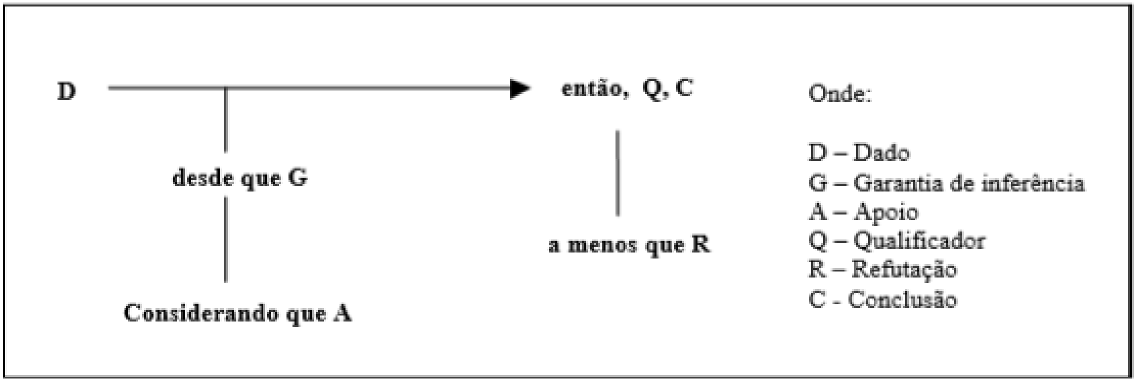


Figura 1: Modelo de Toulmin (adaptado de Toulmin 2001, p. 150).

Segundo Toulmin (2001), os elementos fundamentais de um argumento são os dados (D), a conclusão (ou alegação) (C) e a justificação (ou garantia) (G) e seria possível construir um argumento somente com base nestes elementos, apresentando a seguinte estrutura: "A partir de um dado D, então C, já que J".

Segundo Oliveira, Toulmin substitui os antigos alicerces da lógica pelo papel regulador que passa a atribuir às justificações ou garantias, tendo em vista a necessidade de legitimar e relacionar os diversos elementos presentes numa cadeia de raciocínio, funcionando como regras ou licenças de inferência capazes de justificar a passagem dos dados para uma alegação (Oliveira, 2017). Porém, o argumento pode ficar mais completo quando se especifica a modalidade argumentativa que a justificação fornecida faz recair sobre a conclusão, atribuindo um peso ao efeito produzido nesta por aquela com a adição de qualificadores modais (Q). Isto é, se uma conclusão for necessariamente associada aos dados de onde parte o argumento, então podemos falar da necessidade como modalidade. Outras modalidades são a possibilidade, impossibilidade e probabilidade. Também pode ser importante especificar em que condições a justificação não é suficiente para dar suporte à conclusão, adicionando-se as condições que permitiriam a refutação (R) da justificação. Além destes elementos, pode ser necessário explicitar o apoio (A) de determinadas alegações — através de uma lei, regra ou propriedade aceite no campo de argumentação em questão — que se prestam a servir de fundamento da justificação dada.

Argumentação na aula de Matemática

O pensamento de Toulmin acabou por angariar mais seguidores em domínios de investigação exteriores ao campo da Lógica analítica (formal) do que no seu interior, "designadamente no desenvolvimento de estudos sobre a pluralidade das práticas argumentativas e a sua irredutibilidade a uma abordagem lógica (no sentido analítico)" (Carrilho, 1992, p. 26). Um dos domínios em que se verifica a influência do seu pensamento é o da investigação sobre o ensino de Matemática , mais especificamente, em estudos centrados no desenvolvimento e promoção da argumentação matemática ou na capacidade dos alunos em envolverem-se em processos argumentativos, principalmente em processos de justificação, de prova e, até, de demonstração ou nas relações existentes entre estes processos (Pedemonte, 2002).

A argumentação matemática pode ser considerada como um produto da capacidade transversal em argumentar e é uma noção que pode ser usada para designar as

> conversações de carácter explicativo ou justificativo, centradas na matemática, em que assumem um papel preponderante a fundamentação dos raciocínios, a descoberta do porquê de determinados resultados ou situações, a formulação, teste e prova de conjeturas e a resolução de desacordos através de explicações e justificações convincentes e válidas de um ponto de vista matemático. (Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel, 2008, p. 84).

Douek e Pichat (2003) consideram que podem ser apontadas três razões que explicam o interesse dos investigadores em Educação Matemática e da comunidade escolar pela capacidade argumentativa dos alunos: 1) A necessidade de desenvolver as competências argumentativas dos alunos, desde os níveis iniciais de escolaridade, porque são essenciais aos processos de justificação e de prova em Matemática; 2) A exploração do potencial cognitivo da interação social, encarada como uma das dimensões características da argumentação, com a intenção de desenvolver a capacidade de raciocinar matematicamente; 3) A tendência das orientações curriculares em associar a competência argumentativa ao aumento da autonomia intelectual dos alunos.

Hanna (1996) acrescenta que, apesar da dificuldade em ensinar a reconhecer e a produzir argumentos válidos de um ponto de vista matemático, este é um desafio inevitável para a comunidade escolar, face à perspetiva vigente sobre a forma como o processo de ensino e aprendizagem deve decorrer e a contribuição que o desempenho, tanto de alunos como de professores, deve representar para tal processo.

O significado do processo de ensino e aprendizagem tem sido largamente discutido nas Ciências da Educação, concluindo-se que grande parte dos modelos pedagógicos acabam por ser gerados em torno de duas perspetivas ou interpretações antagónicas (Sfard, 2007). De um lado, pode ser considerado como um processo de transmissão-aquisição de conteúdos relativos a determinado aspeto da realidade; já, do lado diametralmente oposto, é encarado como um processo dinâmico de construção-desconstrução em que cada aluno chega ao conhecimento dos conteúdos através da sua atividade e envolvimento em processos individuais e coletivos (Sfard, 2007).

A primeira perspetiva advoga que a transferência de um património às gerações futuras é o objetivo principal das correntes pedagógicas (ensino tradicional). Neste sentido, a principal preocupação do professor seria a passagem de conteúdos científico-culturais para outro sujeito mais novo, doutrinando-o de forma a assegurar o respeito e a perpetuação dos costumes, tradições e conceções e a continuidade de saberes entre gerações (Marques, 1999). Porém, já no século XIX, Hegel reconhecia a fragilidade desta perspetiva:

> "(…) a juventude (tem de) ser conduzida de uma mera compreensão, a uma auto-atividade, ao esforço próprio. Pois que a aprendizagem como mera receção é um aspeto incompleto do ensino (…) Só a auto-atividade da compreensão e a capacidade de o utilizar de novo fazem de um conhecimento propriedade nossa". (citado em Marques, 1999, p.14)

A segunda perspetiva corresponde aos modelos pedagógicos de índole cognitivista ou construtivista. Estes modelos defendem "a ideia de que o aluno deverá ser o construtor da sua aprendizagem, contribuindo ativamente para a descoberta da verdade e a resolução dos problemas" (Marques, 1999, p. 38). O aluno enceta o caminho da aprendizagem dotado de determinadas estruturas cognitivas que, ao longo do percurso, vão sendo modificadas de forma a influenciar tanto a compreensão como o significado dos conhecimentos, influenciando a perspetiva que o aluno faz da realidade (Ausubel, 1968). "O construtivismo é uma teoria do sujeito que se «auto-constrói», integrando os produtos culturais e os mecanismos da mente. Isto significa que os processos intelectuais não se reduzem a associações de imagens, nem a um aglomerado de informações" (Chiosso 2003, p. 20).

Nesta ótica, espera-se que o aluno assuma o protagonismo desse mesmo património, tornando-o seu, enquanto que o professor é visto como um mediador entre o aluno e a matéria que compõe o património, cabendo-lhe a responsabilidade, entre outras coisas, de "criar um ambiente e atmosfera nos quais as crianças sejam ativas (...) encorajar a criança a encontrar, por si própria, as respostas (...) ensinar a criança apenas quando é de todo impossível que ela proceda à descoberta das soluções" (Marques, 1999, p. 37).

De maneira a introduzir atividades vocacionadas para a criação de momentos de aprendizagem significativa, o professor tem de deixar de entender o aluno como se este fosse uma «tábua rasa», ignorando a dinâmica de pensamento do próprio aluno. Há que olhar para o aluno como o principal agente na construção do seu próprio conhecimento e, por conseguinte, aceitar que o seu envolvimento no processo de ensino e aprendizagem deve ser estimulado em vez de dirigido. Aprendizagem significativa é, portanto, o processo através do qual uma nova informação (um novo conhecimento) se relaciona de maneira não arbitrária e não literal à estrutura cognitiva do aluno, agregando-se, sem substituir, ao património de conceitos e princípios teóricos que o aluno já possui e modificando formas prévias de perspetivar (Ausubel, 1963).

Não é de estranhar, portanto, que as orientações curriculares nacionais, desde os programas curriculares do início da década de 90, até aos documentos mais recentes, procurem promover e relevar o papel de atividades que promovam a argumentação, a comunicação e o raciocínio matemático no processo de ensino e aprendizagem. No já longínquo ano de 1988, surgiu um documento, com o título Renovação do currículo de Matemática (APM, 1988), que antecipou e inspirou a constituição inovadora dos Programas Nacionais de Matemática de 1991. Era, aí, declarado que o ato de argumentar devia ser valorizado de forma intencional e permanente como "capacidade de convencer os outros das nossas asserções e conjeturas" (APM, 1988, p. 62). Aceitar uma afirmação como verdadeira pela simples autoridade da fonte que faz tal afirmação, seja professor ou manual, é muito diferente de desenvolver, por si mesmo, a prova de uma qualquer alegação conjetural empregando argumentos que cumpram critérios racionais de construção, justificação e validação (APM, 1988). Neste documento, era defendido que a passagem do primeiro para o segundo modo de validação de ideias deveria ser uma das principais mudanças a promover no ensino da Matemática, considerando que a argumentação em sala de aula fomenta o desenvolvimento do pensamento matemático e o espírito crítico dos alunos. Era, ainda, assinalado que tanto a argumentação como a demonstração tinham de ser contempladas impreterivelmente pela atividade matemática:

> Se conjecturar é parte essencial da experiência matemática, os seus prolongamentos e complementos naturais são a argumentação e a demonstração. Na realidade, se pretendêssemos sintetizar em poucas palavras o que é fazer matemática, a sequência de palavras exploração/conjectura/argumentação/prova-reformulação da conjectura poderiam bem constituir um ponto de partida para essa síntese. (APM, 1988, p. 62).

O valor atribuído ao envolvimento dos alunos em atividades de argumentação, em particular na disciplina de Matemática, vai decorrer da sinergia de várias ações do professor: 1) valorizar todas as vertentes do raciocínio matemático sem pôr a ênfase no rigor e formalismo típicos das demonstrações; 2) estimular os alunos não só a aprender, mas também a compreender Matemática; 3) valorizar as linguagens naturais e a interação social como ferramentas para a aprendizagem; 4) aproximar a comunicação na sala de aula da existente na comunidade dos matemáticos; 5) confrontar as dificuldades encontradas na aprendizagem da prova procurando caminhos que favoreçam esta aprendizagem; 6) proporcionar condições para o desenvolvimento de competências fundamentais ao exercício pleno de uma cidadania responsável numa sociedade democrática (Boavida, 2005).

Também internacionalmente, desde a década de 80, as orientações curriculares passaram a atribuir especial relevância à necessidade de se criarem contextos diversificados onde processos argumentativos como a explicação e a justificação de raciocínios e procedimentos matemáticos têm um lugar de destaque (Boavida, 2008).

Por exemplo, o NCTM (1994) apresenta orientações nesse sentido. Referindo-se ao modo como o discurso na sala de aula deve ser conduzido de forma a promover atividades de legitimação de argumentos e raciocínios, indica que os alunos, "enquanto exploram e resolvem problemas, devem envolver-se na formulação de conjeturas e na argumentação" (NCTM, 1994, p. 22). Os alunos devem entender que o conhecimento matemático exige que cada aluno seja capaz de "convencer-se a si próprio e aos outros da validade de determinadas representações, soluções, conjeturas e respostas", devendo, como tal, compreender e saber apoiar-se "em argumentos matemáticos para determinar a validade das informações" (NCTM, 1994, p. 48).

De acordo com estas orientações, Boavida (2005) chama a atenção para a importância de envolver os alunos em atividades de argumentação que desafiem os alunos a raciocinar matematicamente e a comunicar os seus raciocínios, pois o nível de sofisticação da capacidade de raciocinar e comunicar matematicamente depende do desenvolvimento da capacidade de dialogar, refletir (pensar), optar e se comprometer.

> a capacidade de dialogar remete para uma atitude de abertura nas relações com o outro que se torna efetiva pelo desejo de comunicar e pela disposição para ouvir; a capacidade de pensar remete para uma atitude crítica e de atenção; a capacidade de optar e se comprometer remete para indivíduos que procuram assumir as suas posições de forma esclarecida e, neste processo, assumem uma atitude interveniente e empenhada. O lugar que a argumentação ocupa num dado contexto reflete o peso que a liberdade de reflexão e ação aí conquistou. (Boavida, 2005, p. 67).

Por sinal, a concretização de práticas argumentativas nas aulas de Matemática acaba por ser uma maneira de levar os alunos a constatar que a construção do conhecimento matemático envolve conjeturar, sustentar, criticar, avaliar e refinar ideias (Boavida 2005). A participação neste tipo de atividades contribui para que os alunos passem a encarar o conhecimento matemático como um processo em trânsito e transdisciplinar, no qual há sempre espaço para o questionamento, para a argumentação e para a revisão do próprio conhecimento, em vez de um processo infalível, estanque e compartimentado, como costuma ser considerado o conhecimento matemático.

Raciocínio matemático e processos de argumentação

A argumentação matemática, na sala de aula, pode ser vista como uma atividade social que decorre da cooperação entre professor e alunos quando procuram explicar, ajustar e justificar as suas intenções e raciocínios apresentando, verbalmente, que motivos estão por trás da sequência de procedimentos realizados durante um processo de resolução (Krummheuer, 1995). Esta atividade envolve vários processos que visam a explicitação de raciocínios e o convencimento dos outros acerca da plausibilidade, ou da verdade, das nossas afirmações.

A noção de raciocínio pode designar a atividade intelectual que consiste em manipular a informação existente de forma a produzir nova informação que possa ser aceite como válida num dado domínio de conhecimento (Balacheff, 2000), ou seja, raciocinar matematicamente consiste em realizar inferências baseadas em razões matemáticas com o objetivo de obter inferências fundamentadas (Ponte, Mata-Pereira & Henriques, 2012). O raciocínio matemático é muitas vezes estabelecido numa base dedutiva uma vez que os objetos matemáticos, ao contrário dos objetos das outras Ciências, são definidos sem terem de corresponder a objetos existentes na realidade, dependendo apenas das características concetuais e das propriedades teóricas resultantes da sua integração num dado corpo axiomático (Balacheff, 2000).

De acordo com o NCTM (2000), só o desenvolvimento do raciocínio matemático permitirá aos alunos ir além da mera memorização de factos, regras e procedimentos e passar a dar sentido e compreender a Matemática. Aliás, o desenvolvimento desta capacidade transversal é um dos objetivos principais dos contextos educativos e das tarefas que, intencionalmente, procuram propiciar atividades desafiantes e momentos de aprendizagem significativa, como as tarefas de exploração.

Ao longo do percurso escolar, pretende-se desenvolver várias formas de raciocínio matemático (raciocínio algébrico, geométrico, proporcional e probabilístico, entre outros), mas, independentemente dos temas matemáticos envolvidos, é um processo que pode ser caracterizado pela sua natureza dedutiva, indutiva ou abdutiva (Ponte, Mata-Pereira & Henriques, 2012). O raciocínio de tipo dedutivo surge relacionado com a realização de demonstrações matemáticas e chega a ser considerado como "o elemento estruturante, por excelência, do conhecimento matemático" (Oliveira, 2002, p.178). Pode ser definido como "um modo de pensamento que normalmente é caracterizado como uma sequência de proposições onde se deve aceitar que uma proposição é verdadeira se também se aceitar a veracidade das que a precedem nessa sequência" (Harel & Sowder, 2007, p.815). Esta forma de raciocinar obedece aos esquematismos e princípios da lógica formal e costuma ser usada com a função de validar conhecimento, sendo sempre desenvolvida do geral para o particular, ou seja, a verdade de uma afirmação, que aparece constituída como conclusão de um raciocínio, tem de decorrer necessariamente da verdade das afirmações (premissas) que permitiram inferir tal conclusão (Oliveira, 2002). O raciocínio de tipo dedutivo não conduz à criação de novo conhecimento, pois, ao partir do geral para o particular, não pode traduzir ou corresponder a um progresso do pensamento já que o conteúdo da conclusão apenas reflete os conteúdos assumidos nas premissas, repetindo-os em termos diferentes (tautologia).

Por sua vez, o raciocínio de tipo indutivo envolve a observação e análise de casos particulares e a identificação de relações e características comuns entre esses casos com o propósito de formular generalizações dessas relações e características comuns (Greenes & Findell, 1999). Este tipo de raciocínio é desenvolvido do particular para o geral, segundo um processo heurístico, isto é, de descoberta-teste, que poderá resultar na criação de novo conhecimento (Polya, 1954; Oliveira, 2002).

Já o raciocínio de tipo abdutivo envolve a formulação de conjeturas e culmina com a obtenção de generalizações cuja validade não tem de ser verificada através de um processo demonstrativo, mas é presumida como muito provável face ao seu significado no contexto em questão (Rivera & Becker, 2009). Este tipo de raciocínio tanto está relacionado com a criação de hipóteses explicativas como com a sua avaliação no intuito de inferir a mais adequada (Oliveira, 2002). Intrinsecamente ligada ao raciocínio abdutivo, encontra-se a noção de plausibilidade sustentada por Polya (1954). Para este matemático, o desenvolvimento do raciocínio de tipo abdutivo acaba por ser essencial para preparar os alunos para a invenção matemática e a plausibilidade tem um papel essencial tanto na descoberta de factos matemáticos como na descoberta de soluções para problemas.

Alguns dos processos diretamente relacionados com os raciocínios de tipo indutivo ou de tipo abdutivo ocorrem durante a resolução de problemas matemáticos e são, nomeadamente, a construção de conjeturas, a generalização, a especialização e a analogia (Polya, 1954). Ao passo que a analogia se encontra estreitamente relacionada com a indução, pois, "quem induz fá-lo por analogia, i.e., a pessoa infere a semelhança das conclusões a partir da diferença dos factos" (Oliveira, 2002, p. 174), a especialização está relacionada com a seleção e sistematização dos casos a analisar, sendo um processo muito utilizado na resolução de problemas (Polya, 1954).

Por sua vez, tanto a construção de conjeturas como a de generalizações envolvem raciocínios de tipo indutivo ou abdutivo. Para alguns autores uma conjetura pode ser definida como

> uma hipótese fundamentada sobre uma relação matemática geral baseada em evidências incompletas. O termo 'fundamentada' destaca o caráter não-arbitrário da hipótese. O termo 'hipótese' indica um nível de incerteza sobre a fidedignidade de uma conjetura e denota que é necessário haver uma ação adicional para sua aceitação ou rejeição. (Stylianides, 2009, p. 264)

Conjeturar matematicamente consiste, portanto, em desenvolver afirmações sobre as relações e características comuns identificadas na observação de um conjunto de dados matemáticos, que apenas são verdadeiras de forma hipotética. (Stylianides, 2009). Segundo Mason, Burton e Stacey, (1984) a formulação de conjeturas é um processo racional que se inicia com a proposta de uma tese e culmina com a sua aceitação como verdadeira, ou com a sua refutação e posterior reformulação, o que obriga a investigar sobre a validade da tese inicial e das reformulações que lhe sucedem. O teste da tese inicial termina com a compreensão dos motivos pelos quais a sua verdade pode ser validada ou rejeitada. Se tiver de ser rejeitada, resta modificá-la de acordo com a perceção dos motivos que levaram à sua recusa ou, então, sugerir nova conjetura, reiniciando o processo que conduz ao desenvolvimento de conjeturas cada vez mais gerais; finalmente, será atingida uma generalização, cuja validade deverá ser certificada através de processos de prova ou de demonstração, como o método demonstrativo de indução matemática (Polya, 1954).

A generalização é um processo central no raciocínio matemático e corresponde, aproximadamente, a fazer uma conjetura de natureza geral sobre uma propriedade, conceito ou procedimento, que se pretende válida para um conjunto alargado de objetos ou condições matemáticas. No contexto matemático, uma generalização, muitas vezes denominada por teorema, só é considerada válida se for demonstrável. Porém, no âmbito do processo de ensino aprendizagem da Matemática, a sua validade deve ser considerada de acordo com as capacidades, conhecimento e competências dos alunos. Na formulação de generalizações, Galbraith (1995) considera que os alunos podem seguir uma abordagem de tipo empírico, baseando-se no teste de alguns casos, ou seguir uma abordagem mais sofisticada de tipo dedutivo.

Nos alunos que seguem abordagens empíricas, este autor distingue dois grupos distintos de acordo com a forma como desenvolvem o processo de especialização: os que fazem testes de modo arbitrário e aqueles em que a seleção dos casos a testar é sistematizada e especializada a partir da compreensão do domínio da conjetura que está a ser testada (Galbraith, 1995). Mas, apesar de uma generalização normalmente partir de conjeturas que se basearam em padrões estabelecidos nos dados, os discentes também têm de determinar, através de uma análise de cariz dedutivo, se esses padrões podem ser expressos a partir das características dos procedimentos e das propriedades dos processos ou dos conceitos matemáticos envolvidos (Yopp & Ellsworth, 2016). Só assim, os alunos poderão ter todas as garantias sobre a validade de um padrão e criar uma perceção sobre a importância do teste de conjeturas e das demonstrações como forma de validação das conjeturas mais gerais (Balacheff, 2000).

Por tudo o que ficou dito, não é de admirar que o raciocínio matemático possa ser definido como um processo complexo, dinâmico e faseado, que "inclui conjeturar, generalizar, investigar porquê e desenvolver e avaliar argumentos" (Lannin, Ellis & Elliott, 2011), enquanto a argumentação pode ser vista como o processo a partir do qual se dá expressão a um encadeamento de raciocínios. Geralmente, um processo de argumentação matemática encontra-se associado à formulação de uma primeira conjetura, que corresponde a uma afirmação entretanto assumida como tese explicativa de um padrão de repetição observado num conjunto de dados. Segundo Toulmin (1993), quando uma afirmação é posta em causa, a função da argumentação passa por determinar o grau de verdade que lhe deve ser atribuído, o que pressupõe a aceitação de uma noção de verdade gradual (plausibilidade) e não dualista (verdade ou falso), além de uma noção de prova que deixa de estar limitada pela utilização de mecanismos de tipo demonstrativo. A Figura 2 representa a relação entre a atividade de argumentação e a criação de conjeturas.

Figura 2: Relação entre a argumentação matemática e a construção e teste de conjeturas (Lin, 2017).

Para alguns autores, a atividade matemática pode ser descrita a partir dos processos de certificar e convencer, estando o primeiro diretamente relacionado com o raciocínio matemático — corresponde ao processo a partir do qual o aluno passa a ter certezas sobre a veracidade de uma asserção — enquanto que o segundo está relacionado com a explicitação desse raciocínio, isto é, com a argumentação e com a produção de provas matemáticas — consiste em fornecer garantias de forma a convencer os outros sobre a veracidade da asserção (Harel & Sowder, 2007). Por conseguinte, a importância atribuída ao desenvolvimento do raciocínio matemático vai exigir que se preste uma atenção especial à argumentação matemática e aos processos de justificação e de prova. (Yakel & Hanna, 2003). Segundo Pedemonte (2002), a necessidade de falar de argumentação em matemática deriva da de caraterizar os processos de raciocínio desenvolvidos durante a resolução de um problema, isto é, dos processos de descoberta, usados na formulação e validação de uma conjetura. Isto não significa que esteja a referir-se a demonstrações. Para esta investigadora, o caráter justificativo é a principal particularidade da argumentação em matemática, embora isto não signifique que todas as justificações são argumentações matemáticas ou que a argumentação matemática apenas esteja relacionada com a sua elaboração (Pedemonte, 2012).

Da relação prevalecente entre raciocínio matemático e argumentação matemática é natural que a relevância desta última passe pela valorização dos seguintes processos: a explicação e justificação de resultados e raciocínios; a prova e a demonstração matemática; a negociação de significados e a descoberta de sentido em ideias apresentadas por outros; a discussão, do acordo ou desacordo, em torno das conjeturas e generalizações/soluções identificadas e a apresentação de razões que justifiquem soluções alternativas (Boaventura 2005). Considerando que os últimos pontos indicados por Boavida (2005) decorrem direta, ou indiretamente, da maneira como os dois primeiros se desenvolvem em sala de aula, apenas os processos de explicação, justificação, fazer a prova e demonstração vão merecer uma descrição sucinta das distinções e equiparações estabelecidas entre si ao nível da construção e apresentação de argumentos.

As salas de aula, onde o desenvolvimento do raciocínio matemático aparece alicerçado à aposta na realização de atividades de argumentação, são, em geral, reguladas por normas sociais que valorizam a explicação e justificação (NCTM, 2007). Normas sociais são rotinas, regras, consensos que regulam as interações sociais estabelecidas entre professores e alunos a propósito das atividades desenvolvidas em sala de aula. Além destas normas, cuja negociação pode ser feita no âmbito do processo de ensino-aprendizagem, podem definir-se normas socio-matemáticas que se focam “em aspetos normativos das discussões matemáticas específicos da atividade matemática dos alunos” (Yackel & Cobb, 1996, p. 461).

A produção de justificações emerge da procura de resposta a perguntas do tipo “Porque afirmas que...?” ou “Porque rejeitas que...?”, ao passo que as respostas às questões do tipo “Porque ocorre...?” requerem, apenas, uma explicação (Duval, 1993). Ou seja, enquanto que a formulação de justificações remete para a apresentação de causas e articulação de razões que podem mostrar a validade informal (de tipo abdutivo) de uma afirmação, decisão ou conclusão, procurando sustentar a sua legitimidade, a explicação é um discurso cujo objetivo passa por tornar inteligível o raciocínio daquele que explica e o caráter de verdade que ele encontrou numa proposição ou resultado e que, muito frequentemente, resultou da sua intuição matemática. (Balacheff, 1988).

No desenvolvimento de uma argumentação, dirigida à justificação, não é suficiente o mero esclarecimento do raciocínio durante ou após a sua elaboração. Ao contrário da explicação, uma argumentação de índole justificativa carece sempre de ser submetida a um exame sobre a sua aceitabilidade (Duval, 1993).

Balacheff (2000) sugere definições que possibilitam a diferenciação entre justificação, prova e demonstração: (1) justificação corresponde ao processo, não formal, de estabelecer o valor de verdade de uma proposição, em que os argumentos utilizados prendem-se diretamente com os conhecimentos que o aluno possui e costumam ser construídos através da linguagem natural — normalmente, pretende-se que os alunos utilizem as suas próprias palavras — mas podem ser usados, para o mesmo fim, esquemas ou diagramas, exemplos geométricos ou gráficos, representações numéricas ou tabelares e procedimentos algébricos (Douek, 2000); (2) a demonstração corresponde a um processo formal que segue regras lógicas bem definidas e utiliza termos matemáticos e simbologia própria da Matemática e da Lógica formal; (3) uma prova corresponde a um processo que pretende estabelecer a verdade de uma proposição seguindo um padrão de correção aceite pela comunidade matemática, sem ter de empregar um elevado grau de formalismo. Em nenhum destes processos, é aceitável a utilização de argumentos de autoridade, perceção, senso comum ou exemplo (Lannin, Ellis & Elliott, 2011).

Estas definições podem ser entendidas de forma inclusiva: a prova acaba por ser um tipo de justificação que convence o próprio e os outros enquanto que a demonstração pode ser encarada como uma prova em que o nível de formalização e simbologia é mais elevado (Balacheff, 2000). Com um registo semelhante, Mason, Burton e Stacey (1984) consideram que a justificação convence o próprio, a prova convence um amigo e a demonstração convence até um inimigo.

Estes autores indicam que a distinção entre justificação e prova está relacionada com o propósito associado a cada um dos processos: uma justificação é um processo argumentativo que procura responder à questão "o que é verdade?" e uma prova ou demonstração serve para responder à questão "porque é verdade?" (Mason et al., 1984). De acordo com Pedemonte (2002), durante a construção de uma conjetura, o aluno tem de procurar argumentos que expliquem a plausibilidade da tese levantada — ou seja, que justifiquem a formulação da conjetura —, para, posteriormente, na fase de produção da prova, poder apoiar-se, com coerência, naquela ação e fixar o valor de verdade adequado à afirmação matemática sob processo de prova. Para isso acontecer, terá de organizar os argumentos já produzidos segundo um encadeamento não necessariamente dedutivo, mas inspirado nesse tipo de raciocínio (Pedemonte, 2012).

A justificação está associada ao processo de ganhar convicção sobre a verdade de um procedimento ou afirmação através da revelação de uma estrutura ou relação que liga o que se sabe ao que se quer saber, enquanto que provar está relacionado com a necessidade de convencer os outros ou de mostrar que não se está enganado e exige a capacidade de questionar mesmo o que parece óbvio saber (Mason et al., 1984). Harel e Sowder (2007) defendem que os alunos têm várias formas de estabelecer a veracidade de uma asserção, passando por fases distintas de formar a sua convicção: (1) convicção externa em que a certeza é estabelecida a partir daquilo que o professor ou o manual asseveram ser matematicamente válido, sem terem em atenção o seu conteúdo; (2) por esquemas empíricos, com os quais estabelecem a verdade a partir da verificação de casos particulares ou da sua intuição sobre os mesmos; e (3) por esquemas de tipo dedutivo que podem ser transformativos (encadeamento inspirado num raciocínio de tipo dedutivo, apesar de não necessariamente dedutivo) ou axiomáticos (deduzindo propriedades umas das outras, partindo de uma base finita de axiomas).

No que diz respeito ao processo de prova, dois propósitos costumam ser-lhe associados: mostrar que uma proposição inicial pode levar a uma condição final numa sequência de passos lógicos; fornecer uma compreensão significativa de como e porquê a conclusão é obtida a partir da hipótese (Tall, 1989). O primeiro propósito tem correspondência na prova encarada como produto de um processo formal, que serve sobretudo o propósito de estabelecer a verdade de uma afirmação matemática — incluindo a demonstração vista como prova —, e o segundo corresponde à prova encarada como processo de desenvolver a compreensão matemática, que leva os estudantes a entender e atribuir significados às conexões estabelecidas quando defendem os seus raciocínios (Hanna & Barbeau, 2010). Para a prova matemática poder exercer o seu papel como forma última de justificação matemática, os alunos têm de ser familiarizados com os padrões de argumentação matemática considerados como legítimos (Hanna, 1996). Por outro lado, é necessário que os alunos reconheçam que uma prova apenas garante a verdade para todos os elementos do domínio coberto pela prova, para além de terem de compreender a necessidade subjacente ao processo e o papel das assunções (definições, axiomas, teoremas) que estão na base de uma prova (Stylianides & Stylianides, 2008).

Os professores de Matemática devem usar diferentes tipos de provas, de acordo com o respetivo desenvolvimento cognitivo dos alunos, e a seleção dos diversos tipos de prova deve refletir a sua preocupação com o significado associado pelos alunos às várias fases que compõem o processo de prova, em detrimento da derivação formal da mesma, se assim for necessário (Tall, 1999). É importante, ainda, que consigam desenvolver diferentes tipos de raciocínio (indutivo, por analogia, abdutivo e dedutivo), conforme a necessidade (Stylianides & Stylianides, 2008). Porém, segundo Stylianides e Stylianides

(2009), as investigações sobre como os professores podem ajudar os alunos a desenvolver a compreensão da prova matemática continuam a ser muito escassas.

Na tabela seguinte, são apresentadas algumas das funções que podem ser associadas à realização de provas matemáticas.

Tabela 1: Razões para usar provas matemáticas (adaptado de Harel & Sowder, 2007).

Para que usar uma prova?	O que é?
Verificação	A prova é um meio de mostrar a veracidade ou falsidade de uma dada afirmação.
Explicação	Pretende-se, não só determinar a veracidade, mas explicar porque é que a asserção é verdadeira.
Descoberta	No processo de prova podemos fazer descobertas, por exemplo que o resultado se aplica a um conjunto de hipóteses não colocadas ou, pelo contrário, que temos de restringir o número de hipóteses colocadas.
Sistematização	É a apresentação de resultados de uma forma organizada, separando axiomas, teoremas, definições e resultados, organizando-os pela ordem em que podem ser deduzidos.
Desafio Intelectual	Ao construir uma prova, cria-se um sentimento de autorrealização que é prazeroso e motivador.
Comunicação	Refere-se ao significado, relevância e validade do resultado matemático provado.

Defender ou constituir uma prova através da apresentação de um argumento exige que os elementos fornecidos no argumento sejam claros e relevantes, podendo ser usados para explicar o assunto em questão, que a articulação destes elementos permita uma comunicação eficaz da prova conferindo-lhe coerência e legibilidade e que o papel a desempenhar por cada elemento no argumento confira consistência e validade à prova assim constituída (Pedemonte, 2002).

Balacheff (2000) identifica três tipos de prova cuja distinção é estabelecida com base no grau de complexidade do próprio processo: (1) as provas por exibição, em que a execução dos procedimentos e a apresentação dos processos de resolução servem para estabelecer a prova (um exemplo são as provas geométricas); (2) o exemplo genérico, em que o aluno explica a validade de uma asserção com base nas propriedades de um caso que passa a ser visto como representante de uma classe, ou seja, a argumentação é delineada a partir da extrapolação das características de um caso particular para um conjunto mais abrangente de casos e costuma ser expressa em linguagem natural (3) as provas intelectuais ou experiências concetuais (incluindo as demonstrações), que se apoiam nas propriedades dos objetos em causa e na forma como podem ser deduzidas de umas para as outras.

Por outro lado, a demonstração pode separar a Matemática de todas as outras ciências, uma vez que a demonstração matemática depende apenas das propriedades puras dos objetos e não dos objetos em si, ou seja, é independente da realidade, apesar de poder adequar-se a ela e, muitas vezes, modelá-la (Toulmin, 1993).

Segundo Duval (1990), a demonstração está associada ao raciocínio dedutivo e ao estabelecimento da verdade, opondo-se ao tipo de raciocínio (abdutivo) que emerge das atividades sociais em que é necessário convencer alguém ou contradizer algo (atividade de argumentação). A argumentação tem regras implícitas que advêm não só da estrutura não unívoca da linguagem natural, mas também do teor das representações dos interlocutores, enquanto que a demonstração deve ser entendida como um exercício dedutivo que permite o estabelecimento da veracidade de um dado resultado a partir da combinação das regras da lógica proposicional com as propriedades e outros resultados já demonstrados ou admitidos como verdadeiros em Matemática (Duval, 1991).

Contudo, apesar de alguns autores considerarem que a demonstração tem caraterísticas particulares não aplicáveis a um processo onde intervém a argumentação, outros consideram que a demonstração pode ser entendida como um processo particular de argumentação. Pedemonte (2002), por exemplo, analisou a argumentação em Matemática e a sua relação com a demonstração, recorrendo ao modelo de argumentação de Toulmin. A estrutura ternária (dados, conclusão e justificação/garantia) proposta por este modelo legitima a comparação entre a estrutura da argumentação e da demonstração (hipótese, conclusão e processo de demonstração) levando a autora a considerar que a demonstração é um caso particular de processo de argumentação, em que o propósito de validar uma conclusão seria alcançado com o fornecimento de uma garantia, constituída a partir de um axioma, de uma definição ou de um teorema (Pedemonte, 2002). Para Pedemonte (2002), a diferença entre uma demonstração e a justificação de uma conjetura apenas reside na finalidade associada a cada processo. A argumentação em torno de uma conjetura, vista como uma expressão de um raciocínio possível, tem como finalidade convencer os outros, enquanto que a demonstração, vista como uma expressão de um raciocínio necessário, tem como finalidade a validação perante os outros.

Segundo Pedemonte (2002), o modelo argumentativo proposto por Toulmin, na sua versão mais elementar (apresentado na Figura 3), pode ser adequado para captar a forma lógica de qualquer processo de argumentação.

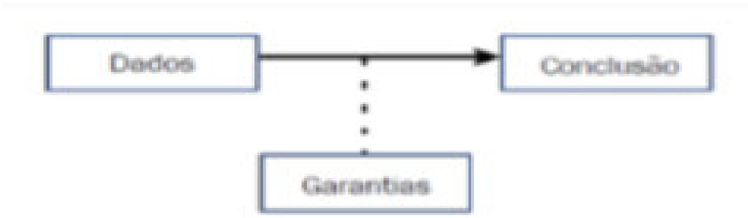


Figura 3. Versão elementar do modelo de argumentação de Toulmin (adaptado de Gil & Martinho, 2014).

Nesta perspetiva, um argumento é uma estrutura complexa e dinâmica que envolve um movimento que parte de uma evidência (dados/fundamentos) e permite estabelecer uma afirmação (conclusão). Todavia, é importante mostrar que o deslocamento de raciocínio, que parte da observação de uma evidência (dados) para a constituição de uma afirmação, é oportuna e legítima (Bello, 2004). Para tal, devem ser utilizadas proposições (garantias) – axiomas, teoremas, regras, princípios e/ou enunciados, exemplos, etc. – que funcionem como autoridade racional e permitam que a conclusão seja, no mínimo, considerada plausível (Toulmin, Rieke & Janik, 1984).

Toulmin (2001) chegou a insistir que o seu modelo, apresentado na Figura 1, não era aplicável em Matemática, já que a validade dos argumentos construídos no campo da Matemática pura podia ser avaliada de acordo com as leis da Lógica formal. Apesar deste facto, atualmente, muitos professores e investigadores em Matemática usam o seu modelo tanto na promoção de certas aprendizagens como para observar e analisar a atividade argumentativa nas discussões coletivas em sala de aula, o que pode indiciar que as transformações produzidas no campo da Lógica, resultantes do pensamento de Toulmin, obtiveram um alcance muito mais radical e abrangente do que ele esperava. Bello (2004) defende que este modelo pode ser utilizado para motivar os alunos a encontrar as evidências que suportam uma afirmação, pois traduz muito bem a ideia de que os argumentos dependem de um conjunto de relações que podem ser examinadas e especificadas. Contudo, os alunos costumam revelar muitos problemas em elaborar argumentos porque não conseguem distinguir as funções dos vários elementos disponíveis (Boavida, 2005).

Dificuldades inerentes à atividade argumentativa

Apesar da atenção prestada pelos investigadores de Educação Matemática à atividade argumentativa como forma de promover o desenvolvimento da respetiva capacidade nos alunos, considerada essencial para o desenvolvimento do raciocínio matemático, a argumentação matemática continua a ser secundarizada, ou mesmo esquecida, em muitas salas de aula (Boavida, 2005). Além da dificuldade inerente à integração de contextos que incentivem este tipo de atividades, é usual os alunos não mostrarem grande predisposição para explicar ou compreender raciocínios mediante a apresentação de argumentos, revelando muita desconfiança na sua competência em articular, justificar e fazer a prova de argumentos, não só através do uso de linguagem matemática, mas, também, através da linguagem natural (Boavida, 2005).

É comum que o discurso da comunidade escolar sobre a relutância dos alunos em apresentar explicações, justificações ou demonstrações na forma de argumentos, aponte com mais veemência para a apatia e desinteresse dos alunos e coloque a tónica do problema em fatores exteriores à escola em vez de colocar como hipótese a ineficácia na implementação de metodologias argumentativas, a ausência de visão estratégica nesse campo ou a complexidade inerente à criação de contextos educativos que permitam a aprendizagem simultânea dos conteúdos programáticos e o desenvolvimento de competências argumentativas (Boavida, 2005). Porém, não obstante o interesse dos investigadores em entender o papel da atividade argumentativa no processo de ensino e aprendizagem, a comunidade escolar, devido a imensos fatores, continua a estar centrada nos produtos (nos resultados das avaliações) em vez de se centrar nos processos, visto que muitos dos estudos realizados sobre as atividades realizadas nas escolas continuam a evidenciar falta, ou mesmo ausência, da prática argumentativa. (Vincent, Chick & McCrae, 2005).

De facto, os estudos em Educação Matemática têm vindo a registar que um elevado número de alunos manifesta dificuldades na argumentação matemática, chegando a fundamentar os raciocínios em dados não incluídos nos enunciados das tarefas que lhes são propostas ou a tirar conclusões a partir de dados que não as sustentam e a justificar conjeturas, ou a efetuar generalizações, sem evidenciarem preocupação em testar as suas formulações iniciais (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008).

Não obstante estas lacunas, as tarefas propostas aos alunos em contexto de sala de aula e pelos manuais continuam a ser, na grande maioria, de caráter fechado. Estas tarefas não promovem o desenvolvimento do espírito crítico nem a capacidade de investigar ou de argumentar, provocando nos alunos o hábito de ficarem á espera das informações e dos esclarecimentos do professor (Magalhães & Martinho, 2014) e de construírem respostas de acordo com o que pensam ser o que o professor quer (Cobb & Yackel, 1998) porque só conseguem entender a Matemática como uma coleção de factos que os estudantes leem e memorizam (Arends, 1995).

Um outro aspeto, que necessita ser considerado no ensino das práticas argumentativas, é o défice de conhecimentos prévios evidenciado durante a aprendizagem de muitos dos tópicos do currículo, já que, tal défice, condiciona a capacidade dos alunos para explicar e justificar de forma fundamentada (Costa, 2001).

Outro problema está relacionado com o tempo que os alunos precisam para construir argumentos e organizar ideias, de maneira a tornarem as suas intervenções convincentes e esclarecedoras, quando comunicam as soluções encontradas e os processos seguidos na resolução das tarefas de exploração[2] ou de investigação (Arends, 1995). Programas curriculares muito vastos geralmente acarretam problemas relacionados com a gestão do tempo de aula, obrigando a uma contenção que pode ter consequências no trabalho desenvolvido pelos alunos e no tipo de tarefas escolhido pelo professor. Perante os condicionalismos relacionados com a escassez de tempo, os docentes acabam por optar, muito frequentemente, por tarefas de cariz fechado em detrimento das tarefas de cariz exploratório, mais desafiadoras e aptas a propiciar momentos de aprendizagem significativa e de desenvolvimento das capacidades comunicativa, argumentativa e crítica (Arends, 1995).

Mas, os problemas mais registados nos estudos sobre a argumentação estão relacionados com os processos argumentativos de provar, incluindo a demonstração, e justificar resoluções de situações problema. Muitas das dificuldades reveladas pelos alunos em compreender a necessidade de provar ou demonstrar, surgem porque estes não conseguem reconhecer o seu valor: nem se apercebem do poder explicativo das conexões e relações que obriga a estabelecer nem "conseguem encontrar sentido nos raciocínios demonstrativos, que surgem aos seus olhos como algo de estranho e obscuro." (Boavida, 2005, p.5). No mesmo sentido, são vários os estudos que assinalam a dificuldade dos alunos em compreenderem a utilidade da demonstração ou da justificação porque "têm dificuldade em justificar afirmações que lhes pareçam óbvias, por acharem a justificação desnecessária" (Simãozinho, 2014, p.118), apresentando também problemas em analisar

[2] Tarefas de cariz aberto que serão explicadas mais à frente.

uma prova já realizada e verificar qual a sua validade e que erros contém (Harel & Sowder, 2007). Os alunos revelam dificuldades em fornecer uma justificação complementar sobre a resolução de um problema que envolva um método ou processo previamente aceite como adequado porque "muito frequentemente, esta resolução é já uma argumentação e não precisa de ser assegurada por um procedimento metacognitivo separado e adicional" (Krummheuer, 1995, p. 232).

Embora grande parte dos alunos não apresente muitas dificuldades na formulação de uma primeira conjetura, verifica-se que, para a maioria, não é fácil justificá-la, testá-la ou prová-la (Mason et al, 1984). No que diz respeito à formulação e teste de conjeturas, Brocardo (2001) afirma que os alunos assumem, frequentemente, conjetura como conclusão, o que, na sua perspetiva, poderá indiciar uma falta de compreensão efetiva do significado de conjetura "que tem de ser objeto de um trabalho explícito por parte do professor." (p. 540).

Para efetuar a justificação das suas conjeturas, o aluno necessita de encontrar alguma razão, ou estrutura, que enquadre o argumento a criar, ou seja, necessita de estabelecer uma ligação entre aquilo que sabe e o que pretende justificar (Mason et al., 1984). De facto, é interessante notar que, quando os alunos começam a realizar tarefas onde é necessário formular e avaliar conjeturas, a maioria prova a sua veracidade para a generalidade dos objetos baseando-se apenas na observação e teste de um número concreto de casos, ou seja, a partir da criação de um argumento empírico (Boavida et al., 2008; Yopp & Ellsworth, 2017). Balacheff (2000) defende, por isso, que a certeza gerada por um conjunto de testes particulares, pode representar um grande obstáculo ao desencadeamento de processos de validação de conjeturas e provas gerais. No entanto, não se pode dizer que seja uma decisão completamente inusitada já que muitas das decisões que são tomadas no dia-a-dia baseiam-se em raciocínios de tipo indutivo, que também são estabelecidos a partir de um conjunto limitado de exemplos (Boavida et al., 2008). De qualquer forma, os argumentos empíricos são legítimos e podem ser valiosos numa argumentação. Em muitos casos, são eles que sustentam a formulação de conjeturas, no entanto é necessário não esquecer que os alunos devem compreender que a sua validade é apenas provisória (Stylianides, 2009).

Revela-se primordial levar os alunos, desde os primeiros níveis de escolaridade, a perceberem que a verificação do valor de verdade de uma afirmação a partir de exemplos não permite estabelecer uma garantia sobre o valor de verdade da conjetura formulada (Boavida et al., 2008; Yopp & Ellsworth, 2017). O que se pretende não é mostrar que uma afirmação é verdadeira para aqueles casos, mas sim encontrar as propriedades comuns a esses casos que justificam a sua veracidade. É, por isso, essencial que os casos particulares, que se usam com vista a chegar a uma generalização, sejam escolhidos de forma sistemática e não aleatória (Rodrigues, 2010). Adotar uma perspetiva matemática sobre o significado da seleção dos casos particulares corresponde à admissão de outra forma de raciocínio (dedutivo) por parte dos alunos e leva-os, por fim, à necessidade de testar as conjeturas mesmo em casos que entendem como o mais gerais possível. (Balacheff, 2000). Para mudar a forma como os estudantes olham a Matemática, será necessário desenvolver um trabalho continuado que lhes permita compreender a diferença entre as generalizações baseadas apenas em casos particulares e as generalizações assentes em propriedades ou conceitos matemáticos (Mata-Pereira & Ponte, 2013).

Os trabalhos de Kuhn (1970) no domínio da argumentação científica também revelaram que o uso de argumentos válidos não é consequência de uma capacidade inata, mas de um hábito que se adquire na prática. Além disso, estes estudos mostraram ainda que o desenvolvimento da capacidade argumentativa não ocorre igualmente em todos os ambientes de aprendizagem, assumindo particular interesse os contextos que tenham relevância para a vida dos estudantes.

Na Matemática, a problemática em torno da argumentação prende-se com a necessidade de criar contextos de aprendizagem que solicitem cada vez mais a interação dos alunos e promovam atividades de colaboração e discussão, requerendo a comunicação das suas ideias e valorizando, não só a linguagem simbólica, mas acima de tudo a linguagem natural (Douek & Pichat, 2003). Os alunos devem ser estimulados a fazer matemática e a sentirem-se participantes ativos numa comunidade com um discurso próprio, a sala de aula. Desta forma, a comunicação oral pode desempenhar um papel crucial na aula de matemática já que funciona como base para o pensamento e é através dela, ou da sua escrita, que o raciocínio se apresenta sob a forma de argumentos (Douek & Pichat, 2003). No caso contrário, a maioria dos alunos apenas tenta ir de encontro às expectativas do professor, decorando demonstrações inteiras ou usando o mesmo tipo de linguagem só porque viram o professor a utilizá-la e porque assim terão «melhor nota», mas sem entenderem por que foi usada (Harel & Sowder, 2007).

2.2. O conceito de limite de uma função

Considerações sobre a aprendizagem do conceito de limite

Face aos elevados níveis de insucesso verificados ao longo da escolaridade, o desenvolvimento do pensamento matemático tem sido encarado como o principal fator de preocupação das investigações realizadas acerca do processo de ensino e aprendizagem correspondente a esta área disciplinar (Domingos, 2003). Muitas das dificuldades detetadas nas investigações comprovam que a dificuldade dos alunos na aprendizagem dos conceitos matemáticos, desde o 1.º ciclo até ao Ensino Superior, se deve ao grau de complexidade do pensamento inerente à sua compreensão. Verifica-se que boa parte dos alunos apresenta uma forma de conceber os conceitos matemáticos que não resulta do conhecimento do conjunto de características identificadas na definição de cada conceito, mas surge relacionada com os processos subjacentes à sua aplicação — compreensão de cariz instrumental —, o que acaba por indiciar um défice no desenvolvimento da sua capacidade de abstração (Domingos, 2003).

O termo compreensão tem sido utilizado no campo da Educação Matemática com o objetivo de explicar a construção do conhecimento. Segundo Skemp (1978), podem ser considerados dois tipos de compreensão: a compreensão instrumental e a compreensão relacional. A compreensão instrumental está relacionada tanto com a aquisição de regras e de métodos procedimentais como com a capacidade de os aplicar na resolução de situações problemáticas em matemática. Deste modo, é valorizado o "saber como" em detrimento do "saber porquê". Por sua vez, a compreensão relacional baseia-se em princípios que têm uma aplicação mais geral, implicando não só o reconhecimento das regras e procedimentos aplicáveis a determinada situação mas, também, o reconhecimento do porquê, o que possibilita um posicionamento crítico que ajuda a descobrir qual o método mais ajustado e quais as adaptações a proceder para que a resolução de um problema contribua para a resolução de novos problemas (Skemp, 1978).

Dada a complexidade crescente que caracteriza o conhecimento matemático, é natural que também os processos de pensamento envolvidos na compreensão dos conhecimentos se tornem mais complexos, passando a ser descritos em termos elementares ou avançados (Domingos, 2003). Para Tall (1991), o pensamento de tipo avançado baseia-se na construção de entidades e propriedades abstratas que são obtidas através de deduções e definições formais. O desenvolvimento do pensamento matemático avançado acaba por ser determinante na aprendizagem dos conteúdos matemáticos, em que "o estudante deve manipular mentalmente, investigar e descobrir coisas a respeito do objeto foco de seu conhecimento, não de forma parcial e fragmentada, mas buscando visualizar a sua totalidade generalizante" (Brandemberg, 2010, p.112). Em contrapartida, o pensamento de tipo elementar refere-se essencialmente à descrição dos objetos matemáticos feita com base nas propriedades concretas que resultaram da sua manipulação experimental (Tall, 1991).

Outros autores consideram que é a complexidade com que são tratados e geridos os vários processos envolvidos, desde os mais operatórios até aos mais formais, o que distingue os dois tipos de pensamento matemático e que não é possível estabelecer uma demarcação bem definida entre muitos dos processos envolvidos no pensamento matemático avançado e no de tipo elementar, mesmo considerando que a matemática avançada se foca essencialmente nas abstrações de definição e dedução (Dreyfus, 1991). Desta forma, existem tópicos da matemática elementar que podem ser tratados de forma avançada, assim como há pensamento elementar sobre temas avançados (Dreyfus, 1991).

A passagem do pensamento elementar para o avançado envolve duas evoluções importantes: a transição da descrição dos objetos matemáticos para a utilização da definição e a transição da necessidade de convencer para a de provar de forma lógica, mais ou menos formal (Tall, 1991). Estas transições requerem uma reconstrução cognitiva semelhante à que se passa nos primeiros anos do ensino superior, quando os alunos lutam contra a sua capacidade, pouco desenvolvida, de compreender as abstrações formais que, na fase inicial, parecem dominar a aprendizagem (Tall, 1991).

A compreensão do conceito de limite de uma função costuma requerer isso mesmo, exigindo que seja constituído um período de transição no qual os alunos têm a oportunidade de abordar com técnicas elementares os conteúdos matemáticos que, mais tarde, devido ao desenvolvimento didático-pedagógico a que serão sujeitos, passarão a introduzir processos de formalização e de abstração generalizante (Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo & Rico, 2013). A natureza complexa do conceito de limite vai requerer o desenvolvimento simultâneo de processos cognitivos, quer ao nível psicológico — representar, intuir e abstrair —, quer ao nível matemático — definir, demonstrar e formalizar —(Fernández-Plaza et al., 2013).

O desenvolvimento histórico da definição do conceito de limite, desde a antiga Grécia até á definição de Cauchy (1789-1857), também revela esta complementaridade entre representações e intuições de cariz geométrico e as abstrações generalizantes de índole mais formal. Por exemplo, a definição proposta por Newton (1643-1727), em 1687, parece resultar de tentativas de descrever certas intuições de cariz geométrico como, por exemplo, a razão limite entre um arco e a sua corda, quando a distância dos extremos da corda se aproxima infinitesimalmente, corresponder a uma tangente ao arco (Katz, 2010).

> A razão final de quantidades infinitesimais (…) [são] limites em direcção aos quais as razões de quantidades diminuindo sem limite convergem sempre; e às quais elas se aproximam cada vez mais que qualquer diferença dada, nunca vão além de, nem de facto atingem, até que de facto as quantidades são diminuídas *in infinitum*. (Katz, 2010, p.914)

Mais tarde, numa época em que a primeira teoria sobre funções de variável real já tinha sido introduzida por Lagrange (1736-1813), Cauchy sugeriu uma definição, apresentada verbalmente, onde apela a noções mais formais[3] como as de infinitamente mais pequeno, variável e função, ultrapassando os exemplos associados às intuições geométricas: "Se os sucessivos valores atribuídos à mesma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo, de tal maneira que finalmente diferem do mesmo tão pouco quanto pretendamos, este último é chamado o limite de todos os outros." (Katz, 2010, p. 914). A tradução simbólica do enunciado de tal definição pode ser a seguinte:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall_{\delta > 0}\ \exists_{\varepsilon > 0}\ |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \delta$$

Contemporaneamente, no Ensino Secundário, o processo de ensino e aprendizagem do conceito de limite não se apoia nesta definição. Recorre, em vez disso, a uma definição equivalente, apresentada por Heine, em 1871, que decorre de uma adaptação da definição de Cauchy e pode ser expressa nos seguintes termos:

> Dada uma função *f*, real de variável real, sendo a e b números reais, diz-se que b é limite de *f(x)* quando x tende para a quando a é um ponto aderente a D_f (domínio de *f*) e a imagem por *f* de toda a sucessão (x_n) convergente para a é uma convergente para b, (ou seja, $\lim_{n \to +\infty} \big(f(x_n)\big) = b$) e representa-se por $\lim_{x \to a} f(x) = b$. Nota: A definição continua válida nos casos em que a ou b são infinitos. (Costa & Rodrigues, 2017)

Construção do conceito de limite

Segundo Tall (1992), a mudança para o pensamento matemático mais avançado implica uma transição difícil de uma posição em que a compreensão dos conceitos tem uma base intuitiva, fundada nas experiências e conhecimentos prévios, para uma outra onde os conceitos são especificados e compreendidos através de definições formais e as suas propriedades são reconstruídas através de deduções lógica.

[3] De modo a ilustrar, com um exemplo, o grau de formalismo alcançado pelo pensamento do matemático, basta referir que Cauchy foi o primeiro a relacionar um número irracional com o valor (o limite) para o qual tendem as frações racionais com quocientes cada vez mais próximos desse irracional (Katz, 2010).

Apesar de não ter atingido todos os objetivos pretendidos, nos anos sessenta, surgiu uma tentativa bem-intencionada de criar uma abordagem aos conceitos matemáticos baseada em definições claras e rigorosas que eram apresentadas de uma forma que se esperava que os alunos entendessem. O problema é que a aprendizagem de um conceito matemático — do seu significado, da sua extensão, das propriedades que o caracterizam, das noções que delas podem ser derivadas, das suas características essenciais — depende de mais variáveis cognitivas do que a atribuição de sentido às palavras usadas na sua definição. Aliás, é provável que o entendimento do conceito de limite de uma função contenha fatores ocultos que entram em conflito com a definição formal do conceito, causando confusão na sua aprendizagem (Tall & Vinner, 1981).

> Dentro da atividade matemática, as noções matemáticas não são usadas apenas de acordo com sua definição formal, mas também através de representações mentais que podem diferir de pessoa para pessoa. Esses "modelos individuais" são elaborados a partir de "modelos espontâneos" (modelos que preexistem antes da aprendizagem da noção matemática e que provêm, por exemplo, da experiência quotidiana), interferindo na definição matemática. É de assinalar que a noção de limite denota muitas vezes um limite que não pode ser atravessado, podendo, ou não, ser abordado. Que às vezes é visto como acessível, outras como inacessível. (Cornu, 1983, p. 323)

Quando os discentes são confrontados pela primeira vez com definições matemáticas, é quase inevitável que encontrem uma gama restrita de possibilidades que permita colorir com sentido as imagens construídas psicologicamente, não obstante os conflitos cognitivos que, no futuro, estas mesmas possibilidades possam vir a originar (Tall, 1992). Segundo Tall e Vinner (1981), a formação mental de um conceito matemático depara-se com duas dificuldades: a complexidade inerente à compreensão do conceito e a impossibilidade de verificar se o conceito está formado de acordo com a definição matemática. Para se entender melhor as dificuldades, é conveniente introduzir dois termos originalmente impulsionados pelos dois autores mencionados no início do parágrafo: conceito imagem e conceito definição (Tall & Vinner, 1981).

O termo conceito imagem descreve a estrutura cognitiva total associada a um conceito, que inclui todas as imagens mentais, todas as propriedades e todos os processos suscitados na memória quando vemos, ouvimos ou estabelecemos alguma conexão que evoque o nome desse conceito. O conceito imagem é construído, ao longo dos anos, por intermédio de experiências de todos os tipos, estando sujeito a transformações, acréscimos ou empobrecimentos sempre que cada indivíduo é confrontado com novos estímulos que tragam à colação informações do conceito (Tall & Vinner 1981). Por sua vez, o conceito definição corresponde à definição verbal que é usada para explicar um conceito, determinando o seu significado e especificando as características que servem para o distinguir ou equivaler a outros conceitos matemáticos (Vinner, 1983).

A compreensão de um conceito depende da formação inicial do conceito imagem do mesmo, entendendo, o autor, que o processo de formação mental dos conceitos resulta da ação de influência recíproca entre o conceito imagem e o conceito definição (Vinner, 1983). Vinner (1991) refere que o conceito imagem é inexistente, se nenhum significado for associado ao estímulo gerado pelo termo do conceito. Isto pode acontecer por vários motivos: a definição ter sido memorizada sem um significado associado; o conceito ter sido introduzido somente a partir da representação da sua definição, sem a apresentação de vários exemplos e contraexemplos que permitissem a formação do conceito imagem; se o contexto impedir a evocação do conceito imagem por não sugerir uma associação reconhecida ou se o conceito definição permanecer desativado. Por conseguinte, o conhecimento da definição não nos garante a compreensão do conceito. Idealmente, a formação do conceito imagem deveria basear-se em aproximações ao conceito definição, devendo, o processo de aproximações, ser controlado a partir da definição formal (Vinner, 1983). Assim, a aprendizagem de um conceito só terminaria, com sucesso total, quando o conceito imagem tivesse como correlato a definição formal do mesmo (Vinner, 1983). Contudo, este processo não é nem simples nem linear. É frequente ocorrer a formação de estruturas cognitivas imagem-definição potencialmente conflituosas e não é invulgar verificar-se que uma dada situação não chega para estimular o esquema mental mais relevante, acabando por ser ativado outro menos relevante. Por exemplo, um aluno pode referir a definição formal de função quando a mesma lhe é pedida, mas, quando está envolvido noutro tipo de tarefas, o seu comportamento pode ser baseado apenas no conceito imagem de fórmula algébrica ou de gráfico (Vinner & Dreyfus, 1989).

Apesar da colaboração com Vinner, Tall (1992) não trata a distinção entre conceito imagem e conceito definição de modo tão absoluto e compartimentado, continuando a ver o conceito imagem como uma estrutura cognitiva total, mas passando o conceito definição a ser visto como uma parcela do conceito imagem. À medida que um conceito é experienciado, através da utilização de representações desse conceito (definição formal, mas não só) e das conexões que vão sendo estabelecidas entre estas e as referências, crenças e conhecimentos prévios mobilizados pelo aluno, as imagens formadas na sua mente vão sendo transformadas, enriquecendo ou desvirtuando, a cada novo estímulo, a formação do conceito imagem e, possivelmente, o conceito definição (Tall, 1992).

Cornu (1983), comentando o trabalho de Tall e Vinner (1981) e fornecendo pistas para a perspetiva ulterior de Tall (1992), assevera que o conceito definição pode ser entendido como o conjunto de

> frases apreendidas mecanicamente, mais ou menos ligadas a um conceito; pode ser uma reconstrução ou uma reformulação pessoal de uma definição matemática; é também o conjunto de palavras que empregamos para explicar um conceito. É um discurso próprio de cada indivíduo: não tem de coincidir com a definição formal do conceito, ou seja, com a definição admitida pela comunidade matemática. (Cornu, 1983, p.66).

Será, portanto, muito difícil garantir a correspondência exata do conceito definição com a definição formal, sendo certo, somente, que a formação do conceito imagem acaba sempre por determinar o alcance da compreensão do conceito definição (Tall, 1992).

Segundo Tall (1992), pode indicar-se duas formas de abordagem ao conceito de limite (e de continuidade de uma função): a partir da definição informal — conceção dinâmica que se desenvolve de maneira intuitiva (abordagem defendida por Tall) — ou da definição formal — conceção métrica que é o resultado de um processo dedutivo (abordagem perspetivada em Vinner (1983)).

Tall (1992) defende a inadequação da definição formal já que esta, embora possa ser constituída como um valioso fundamento matemático, acaba por não ter os mesmos méritos no que diz respeito à sua valia como estímulo ou como conhecimento de base para desencadear e desenvolver o processo de aprendizagem do conceito de limite. É preferível promover uma abordagem que se baseie em noções que tenham o duplo papel de serem familiares aos alunos e forneçam uma base para o processo de compreensão do conceito, do que lidar com definições formais que contêm elementos não familiares ao aluno e propiciam a introdução de confusões e conflitos cognitivos. Apesar da definição formal poder constituir um excelente ponto de partida para um desenvolvimento lógico relacionado com limites, não deve ser constituída como raiz cognitiva apropriada ao seu desenvolvimento curricular (Tall, 1992).

A introdução da definição informal do conceito de limite pode ser alcançada mediante explicações informais e da utilização, em espiral, de exemplos específicos e de contraexemplos que possibilitem abordar o conceito de limite num determinado contexto, sem nunca esquecer o objetivo de mais tarde procurar atingir a definição formal do conceito, que vai sendo desenvolvida subtilmente (Tall, 1992).

A abordagem inicial ao conceito de limite de uma função poderia ser baseada num processo dinâmico de dupla aproximação e na utilização de funções reais de variável real cujos gráficos possuíssem características diferentes de covariação e de convergência (Tall, 1992). Depois, a partir das conclusões retiradas no processo anterior, escrever-se-ia uma primeira definição de limite de cariz informal, que deveria ser sujeita a um processo de teste com base em novos exemplos e contraexemplos, realizando-se um processo de refinamento iterativo sobre a definição semelhante ao esquema proposto na Figura 4 (Oehrtman, Swinyard & Martin, 2014).

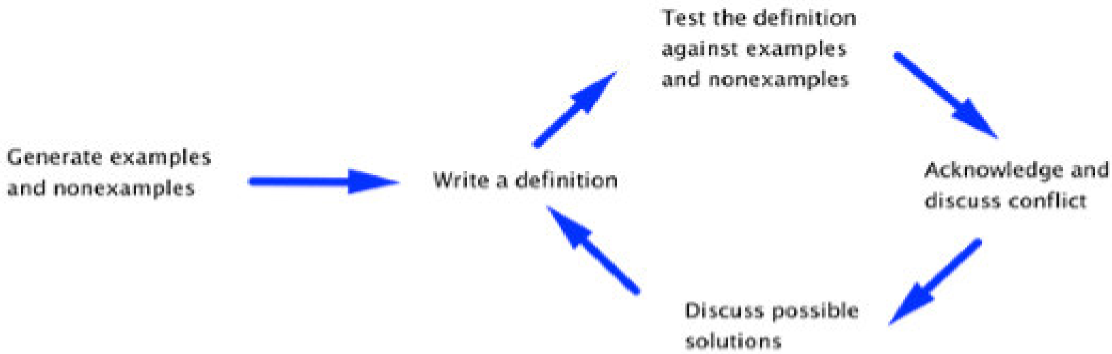


Figura 4: Processo de refinamento iterativo. (Adaptado de Oehrtman, Swinyard & Martin, 2014).

Outra perspetiva, defendida por Tall (1995), baseia a construção do conhecimento matemático na forma como a espécie humana consegue desenvolver conceitos abstratos a partir da sua interação com o contexto envolvente, admitindo que tal desenvolvimento depende das capacidades humanas de percecionar coisas (objetos, procedimentos, processos), agir sobre elas e refletir sobre tais ações de modo a construir teorias. A partir desta perspetiva, Tall (2004) constrói a teoria dos três mundos, que procura explicar como é que a compreensão de um conceito pode ser desenvolvida a partir das ações do indivíduo sobre os objetos e os processos. Esta teoria aponta para a existência de três tipos de desenvolvimento cognitivo correspondentes a três mundos matemáticos diferentes.

O primeiro mundo é denominado por mundo personificado (embodied world) e inclui a forma de pensar dos indivíduos acerca das coisas — objetos, procedimentos, processos — que são percecionadas mediante experimentação. Os juízos de verdadeiro e falso vão depender do resultado da experiência: se ocorrer o resultado esperado então o juízo de verdadeiro é aplicável; se suceder o contrário, a noção sobre o processo ou objeto é falsa (Tall, 2004). À medida que as ações praticadas neste mundo vão ficando mais complexas, a pertinência da utilização dos símbolos torna-se cada vez mais subtil e determinante do entendimento que se faz do mundo, dando, então, lugar ao mundo procetual (proceptual world) (Tall, 2004).

Gray e Tall (1994) recorrem à palavra proceito (procept) para se referirem ao conjunto de conceito e processo, representados pelo mesmo símbolo, e defendem que os discentes têm uma compreensão mais completa e profunda quando combinam o pensamento processual e o pensamento concetual, admitindo que a ambiguidade na interpretação dos símbolos pode ser a chave que conduz ao pensamento matemático avançado.

Gray e Tall (1994) referem-se a esta combinação como pensamento procetual, definindo-o como "a capacidade de manipular o simbolismo de forma flexível, como processo ou produto, alternando livremente entre diferentes simbolismos para o mesmo objeto." (p.121). A passagem da manipulação dos símbolos vistos como processos (por exemplo, 3 visto como resultado da contagem 1 2 3), para a manipulação dos mesmos símbolos vistos como conceitos (por exemplo, 3 visto como número real positivo) permite que os símbolos passem ser vistos como entidades manipuláveis com especial vocação para fazer matemática (Tall, 2004). Enquanto que o pensamento processual pode ser caracterizado pela atenção que presta aos procedimentos e pelo suporte de sentido que as regras procedimentais lhe conferem, o pensamento procetual permite tratar os processos matemáticos com base numa relação de sujeição aos conceitos e pode ser caracterizado pela compressão de etapas na realização de processos (Gray & Tall, 1994). Ou seja, os símbolos passam a ser compreendidos como conceitos que contêm propriedades que podem ser recombinadas (Gray & Tall, 1994). Neste mundo, dominado pela ambiguidade simbólica, os processos que permitem verificar a verdade dos factos são a manipulação aritmética ou algébrica.

O terceiro mundo é baseado nas propriedades dos conceitos que surgem expressas por meio de definições formais e passam a ser utilizadas como axiomas na especificação das estruturas matemáticas. Este mundo corresponde, portanto, ao mundo formal (formal world) no qual a verdade é verificada com provas que cumprem os requisitos de uma teoria coerente e deduzida logicamente (Gray & Tall, 1994).

A teoria dos três mundos pode ser constituída como pano de fundo na compreensão da construção do conceito de limite que os alunos têm de empreender (Juter, 2007). Inicialmente, o conceito de limite pode ser introduzido de maneira a estimular a intuição dos alunos através de um enfoque exploratório, usando tabelas de valores de uma função ou o seu gráfico (mundo personalizado). Depois, através da notação simbólica de limite e da ambiguidade que esta confere a este objeto matemático, passa a ser estimulado o pensamento procetual do aluno (mundo proceptual). O limite pode ser visto como um exemplo de proceito, pois "a notação $\lim_{x \to a} f(x)$ pode representar, simultaneamente, o processo de tender para um limite e o valor de limite" (Gray & Tall, 1994, p. 119). Por último, a compreensão do conceito de limite do aluno deve passar a acomodar a definição formal do conceito (mundo formal) (Juter, 2007). Os alunos devem movimentar-se entre estes três mundos de acordo com a alteração das suas necessidades e experiências matemáticas, ou seja, conforme as representações mentais do conceito vão sendo formadas e transformadas (Juter, 2007). Assim, quanto mais conexões forem encontradas entre as representações, melhor será a compreensão do conceito (Dreyfus, 1991).

Dificuldades na aprendizagem do conceito de limite

Segundo Tall (1992), embora o conceito de função seja indicado como central na matemática moderna e a sua compreensão requerer processos cuja complexidade permite classificá-los de pensamento avançado, é na aprendizagem do conceito de limite que se torna mais óbvio a necessidade de fazer a transição de um plano elementar para um plano mais elevado do pensamento matemático. Como observou Cornu (1983), o limite acaba por ser o primeiro conceito matemático em que os alunos não determinam o seu valor através de um cálculo matemático direto. Em vez disso, é um conceito "cercado de mistério" em que "é preciso chegar ao destino por uma rota tortuosa" (Tall, 1992).

A compreensão que cada aluno produz do conceito de limite vai depender da noção intuitiva que, nele, vai ser gerada quando iniciar o processo de aprendizagem em torno da identificação do limite de uma função num ponto, ou no infinito, e do conflito criado entre a noção intuitiva e a definição formal, quando o aluno for confrontado com a última (Fischbein, 1994). Se não for tomado em consideração, este conflito, originado por abordagens que partem de representações diferentes do conceito, pode tornar-se bastante problemático para a sua aprendizagem porque pode levar à formação de falsos conceitos ou de noções pouco pertinentes matematicamente (Fischbein, 1994).

O significado de limite e os processos de determinação, gráficos ou algébricos, são exigidos em diversos contextos matemáticos, entre os quais constam o limite de uma sequência, de uma série, de uma função, os limites laterais num ponto aderente ao domínio e o limite envolvido na compreensão de outras noções matemáticas, como são as de continuidade, de diferenciabilidade e de integração. Porém, estudos empíricos levados a cabo em torno da aprendizagem dos limites têm mostrado que muitas das dificuldades reveladas são comuns aos diferentes contextos referidos (Tall, 1992).

Uma das conclusões destes estudos relaciona as dificuldades encontradas com mal-entendidos linguísticos (Cornu, 1991). A palavra limite, segundo Cornu (1991), pode ter diversos significados, diferindo de pessoa para pessoa e até diferindo, na mesma pessoa, em momentos diferentes. Por exemplo, o limite pode ser entendido como: algo atingível; algo inatingível; um ponto do qual outros se aproximam sem o atingir; um ponto do qual outros se aproximam atingindo-o; o limite superior (ou inferior); o máximo ou o mínimo; um intervalo (que resulta de uma vizinhança restrita); algo que ocorre "imediatamente depois" do que pode ser atingido; um constrangimento, uma proibição, uma regra; o fim. De facto, o termo limite tem muitas conotações na vida quotidiana que estão em desacordo com o significado matemático de limite: um limite de idade ou de velocidade corresponde, normalmente, a um valor concreto que não pode ou não deve ser ultrapassado, enquanto que, matematicamente, o termo limite corresponde ao valor para o qual tende uma sequência de valores, discreta ou continuamente, podendo o valor ser atingido ou não, o que não invalida a possibilidade de ser ultrapassado.

Este problema estende-se também à terminologia associada aos processos matemáticos de determinação do valor do limite, quando esta equipara noções como "tem o limite de", "tende para", "converge" ou "aproxima-se" que, novamente, têm significados coloquiais diferentes dos significados matemáticos (Schwarzenberger & Tall, 1978). Num trabalho sobre os obstáculos à conceção de limite, Cornu (1983) constata que os alunos atribuem sentidos diferentes às expressões "tende para" e "tem por limite", associando à primeira o movimento de aproximação de um processo dinâmico enquanto que a segunda costuma ser relacionada com uma barreira estática e inultrapassável.

Também é frequente, os problemas criados em torno da compreensão do limite estarem relacionados com a aceitação da lógica que subjaz ao processo de determinação do limite, porque a nossa mente não está preparada para o conceito de infinito (Fischbein, 1994). Por exemplo, as noções de infinitésimo e de infinitamente pequeno, ao designarem a existência de quantidades cada vez mais pequenas e, ao mesmo tempo, representarem uma regra de progressividade infinita, acabam por originar conflitos que prejudicam a compreensão da noção de limite (Monaghan, 1986). Para muitos alunos, é difícil entender um processo a partir do qual se tiram conclusões que abrangem um número infinito de termos, ou imagens, mas culmina com a obtenção de um valor concreto, após consideração de um número finito de termos[4] (Juter, 2007). Também Sierpinska (1985), num trabalho de investigação sobre os obstáculos epistemológicos relacionados com a aprendizagem do conceito de limite, defende que o conjunto de obstáculos com mais impacto nos alunos é o que resulta da recusa dos conjuntos infinitos (Sierpinska, 1985).

A autora identifica cinco tipos de obstáculo: horror ao infinito; obstáculo relacionado com a noção de função; obstáculo geométrico ou numérico; obstáculo lógico; obstáculo relacionado com os símbolos.

Sierpinska (1985) refere que os problemas relacionados com a noção de infinito apenas ocorrem porque o nosso sentido de finitude nos impele a atribuir ao infinito características e propriedades das coisas finitas e limitadas. A possibilidade de aplicar às grandezas infinitas os mesmos métodos algébricos que se utilizam com as grandezas finitas, pode tornar-se um grande obstáculo à aprendizagem dos limites. Uma das dificuldades costuma aparecer associada à questão de uma soma infinita de termos poder ter como resultado um valor finito ou poder ser infinito. Outras dificuldades estão associadas ao facto do quociente entre duas funções, que tendem simultaneamente para 0 ou para infinito, poder tender para infinito ou para um valor passível de ser determinado (Cornu, 1983), ou ao facto da subtração entre duas quantidades infinitas não ter de ser obrigatoriamente zero, podendo mesmo resultar numa quantidade infinitamente grande (Sierpinska, 1985).

Como obstáculos relacionados com a noção de função, Sierpinska (1985) indica: o conhecimento acerca de funções está, normalmente, centrado na relação de dependência entre variáveis e no cálculo dos valores de y ou de x através da manipulação de uma expressão algébrica, ou do gráfico de uma função, enquanto que a noção de limite não é aplicada unicamente aos valores que pertencem ao domínio da função, nem o valor, ou a existência, de $\lim_{x \to x_0} f(x)$ tem de coincidir obrigatoriamente com o valor ou com a existência da imagem para o valor x_0; as confusões que os alunos fazem em torno das noções de aproximação, de convergência e de tendência levam os alunos a admitir que as funções monótonas são as únicas que possuem limite (limite visto como um processo dinâmico de aproximação); não distinguirem a noção de limite das noções de ínfimo ou de supremo levando-os a pensar que uma função só tem limite se for limitada.

Quanto aos obstáculos de cariz geométrico/numérico, podem advir dos seguintes motivos: o conceito de número real não costuma ser aprofundado com algumas noções

[4] O processo de limite é baseado numa demonstração por indução completa, na qual, através da consideração de um número concreto de termos ou de imagens, passamos a tirar conclusões gerais para a infinidade dos termos ou imagens (Sierpinska, 1985).

topológicas que poderiam conferir-lhe maior amplitude e favorecer certas intuições numéricas que beneficiam a aprendizagem do conceito de limite (Sierpinska, 1985). De facto, a maioria dos alunos desconhece que 0.999999…, 1.000000… e 1 são três representações do mesmo objeto. Por conseguinte, quando um aluno se depara com o gráfico de uma função monótona crescente que admite assíntota horizontal $y = 1$, tal desconhecimento pode conduzir o aluno a intuições incorretas sobre o significado de limite, passando a achar erroneamente que 1 é o valor do limite por aproximação do valor 0,999999…, que seria assumido como um número diferente de 1 (Sierpinska, 1985).

Complementarmente, Sierpinska especula historicamente sobre a origem deste obstáculo:

> Não se pode saber se a noção de limite se tornou mais rigorosa no século XIX graças à definição de número real, ou se, pelo contrário, a elaboração de uma definição de número real apenas foi possível porque a compreensão da noção de limite se tornou mais precisa e porque se pretendia alargar o âmbito dos conjuntos numéricos. Neste sentido, é difícil de afirmar se as intuições dos alunos são mais geométricas ou mais numéricas. (Sierpinska, 1985, p.53)

O obstáculo lógico diz respeito às dificuldades originadas pelas definições quando estas exigem a utilização de quantificadores na sua formulação. Tal utilização pode tornar-se problemática quando os alunos desconhecem o significado dos quantificadores universais e existenciais e não conseguem reconhecer que existe uma ordem correta para levar a cabo a sua escrita (Oehrtman et al., 2014; Sierpinska, 1985). As dificuldades, causadas pela definição formal, também podem derivar da complexidade dos símbolos ou da ambiguidade da terminologia empregue na sua escrita, sem esquecer as dificuldades inerentes à compreensão dos processos de desigualdade e de implicação ou da noção de valor absoluto, presentes em algumas definições. Por outro lado, a definição inverte o modo natural de pensar sobre funções e sequências que, normalmente, parte da consideração de elementos dos respetivos domínios (Oehrtman et al., 2014).

Outra dificuldade, suscitada pela definição formal está associada ao facto de "(…) os aspetos cognitivos não poderem ser gerados diretamente (de forma pura) a partir da definição matemática" (Cornu, 1991, p. 153). Juter (2007) acrescenta que as demonstrações ou processos de prova, realizados a partir das definições formais, parecem estar muito distantes das experiências prévias dos alunos, o que dificulta a integração de novos conhecimentos no corpo de conhecimentos adquirido anteriormente.

Contudo, também as aproximações informais à definição de limite podem ser constituídas como fontes de dificuldades. Oehrtman (2008) refere que a reformulação informal da definição de limite geralmente não contribui para a realização de atividades adequadamente estruturadas à descoberta do significado do conceito. A partir de entrevistas realizadas com alunos, o autor constatou que a utilização de linguagem informal na exposição da definição levou os alunos a simplificar o significado do conceito e a reduzir o alcance das implicações subjacentes ao seu significado (Oehrtman, 2008).

Os obstáculos, que os símbolos podem constituir para os alunos, tornam-se muito visíveis quando são utilizadas definições que introduzem notações simbólicas que correspondem a letras do alfabeto grego. A estranheza, que tais letras induzem nos alunos, faz com que estes prefiram memorizar a ordem com que aparecem escritas na definição, em vez de descobrirem o que representa cada letra usada e entenderem que a ordem da sua disposição na definição obedece ao sentido que se pretende conferir, como acontece com uma frase escrita numa língua com símbolos cifrados (Sierpinska, 1985).

Também a leitura incorreta da notação $\lim_{x \to a} f(x) = b$ pode imprimir alguns transtornos em torno da compreensão do conceito de limite. Incorretamente influenciados por uma das partes da notação ($x \to a$), é frequente ouvir os alunos afirmarem que "o limite da função *f* converge para b" ou que "o limite da função *f* tende ou aproxima-se de b", quando se esperava que dissessem "o limite da função *f* é b", ou "a função *f* tem por limite b", ou "os valores de *f(x)* tendem/aproximam-se de b quando os valores de *x* tendem/aproximam-se de *a*". (Sierpinska, 1985).

Finalmente, não deve ser esquecido que as aprendizagens dos alunos são muito influenciadas pela forma como as crenças do professor moldam o currículo através das decisões relativas ao que se ensina, como se ensina e quando se ensina (Arends, 1995). Por vezes, pode ser necessário criar métodos de complexidade reduzida com a intenção de ajudar os alunos a superar situações de conflito. Segundo esta linha de pensamento, Spivak (1994) propõe um método para verificar se o limite de uma função, no ponto de abcissa a, é b: desenhar duas retas horizontais, com a mesma escala e cada uma delas representando os valores reais de x e de $f(x)$; depois, desenhar setas que iniciam na reta que contém os valores de x e finalizam na reta dos valores de $f(x)$.

Capítulo 3: A unidade didática

Este capítulo é destinado à apresentação da intervenção letiva que contemplou a parte inicial da unidade de ensino “Limites segundo Heine de funções reais de variável real” e foi concretizada entre 25 de março e 3 de abril de 2019, numa turma do 11.º ano de escolaridade da Escola Secundária de Camões.

A iniciar, surge uma descrição do contexto escolar vivenciado durante a intervenção, na qual consta a caracterização sumária da Escola e da turma. Em sequência, é efetuada a ancoragem da unidade de ensino nas orientações curriculares vigentes assim como nas opções didático-pedagógicas tomadas durante a experiência de ensino.

Na ancoragem apresento os conceitos matemáticos abordados no decorrer da lecionação, aprofundando teoricamente alguns aspetos relacionados com a definição de limite, e explico as estratégias e opções tomadas na promoção de contextos vocacionados para atividades de argumentação e na seleção das tarefas, dos recursos tecnológicos utilizados e dos modos de trabalho dos alunos. Incluo, ainda, a planificação da unidade e uma descrição detalhada de cada tarefa realizada, sem esquecer o processo de avaliação das aprendizagens levado a cabo no fim da unidade letiva.

A finalizar o capítulo, é apresentada uma descrição sucinta das aulas lecionadas, na qual constam os objetivos e estratégias previamente planificados, assim como uma reflexão sobre os desvios que as planificações iniciais tiveram de sofrer no decorrer da intervenção letiva.

3.1. A Escola

A Escola Secundária de Camões, também conhecida por Liceu Camões, é uma das mais antigas e prestigiadas escolas de Lisboa — foi o primeiro liceu moderno de Lisboa —, tendo o seu edifício sido classificado, recentemente, como monumento de interesse público. Apesar de fundada em 1902, apenas foi instalada no atual edifício sete anos depois, ficando, desde então, localizada na Freguesia de São Jorge de Arroios, “presentemente uma zona habitacional e de serviços, cujo fácil acesso permite uma população escolar muito diversificada” (PE, 2014, p.1).

A escola contém vários edifícios autónomos, além do edifício central com forma de “E”, sendo constituída por vários espaços e equipamentos: 39 salas de aula, laboratórios de física e de química, 4 salas de informática, ginásio e campos de jogos, 1 pavilhão gimnodesportivo, 1 museu, bibliotecas, 1 auditório, 1 sala de multimédia e informação, 1 sala de estudo, oficinas de arte, gabinete de orientação escolar, gabinete de psicologia e ensino especial, gabinete do projeto educação para a saúde e educação sexual, entre outros. A fachada imponente, as varandas com arcadas e os pátios abertos são características do edifício principal de dois pisos, construído para captar o ar e a luz, respeitando os critérios de funcionalidade, segurança e higiene, típicos da viragem do século (PE, 2014).

Mas, a historicidade da escola também acarreta alguns aspetos menos positivos: as salas de aula foram construídas para corresponder a um modelo de ensino centrado no professor e na transmissão de conhecimentos; as salas de aulas apresentam inadequações acústicas e térmicas; a instalação da rede elétrica coloca questões de segurança; degradação das paredes, janelas e revestimentos (PE, 2014). Apesar de terem ficado sem efeito as obras de requalificação previstas para 2011, a escola tem realizado pequenas obras e adquirido mobiliário, projetores e computadores para equipar algumas salas de aula.

Além das atividades vocacionadas para o enriquecimento curricular (Cineclube Camões; Projeto Intervir; Movimento Camoniano), a oferta formativa, distribuída por regimes de ensino diurno ou noturno, contempla os Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologia, de Ciências Socioeconómicas, de Línguas e Humanidades e de Artes Visuais, um Curso Profissional de Técnico de Gestão e Programação de Sistemas Informáticos, Cursos de Educação e Formação de Adultos e Português para Falantes de Outras Línguas (PE, 2014). Um princípio matricial e meta do Projeto Educativo de 2014-2017 é: "Uma escola pública e democrática que garanta uma formação integral das pessoas, assente numa reflexão consciente e crítica de todos os valores e conhecimentos e promova um desenvolvimento físico e psicológico equilibrado" (PE, 2014, p.12).

3.2. A Turma

A turma com a qual desenvolvi a unidade didática é do 11.º ano do Curso de Ciências Socioeconómicas. O primeiro contacto com a turma ocorreu durante a primeira semana de aulas do ano letivo de 2018/2019, no final de setembro, passando a assistir, desde então, às aulas desta turma com bastante frequência (as aulas eram de 90 minutos e aconteciam três vezes por semana). O conhecimento das características de cada aluno e do contexto vivenciado em sala de aula tornou-se mais efetivo quando comecei a participar nas atividades de aprendizagem, interagindo com os alunos no esclarecimento de dúvidas e colaborando com a orientadora cooperante na monitorização dos momentos de trabalho autónomo dos alunos.

No início do ano letivo, a turma era composta por 28 alunos, apesar de, durante o primeiro período, um dos alunos ter saído da turma, porque pediu transferência para frequentar, em regime noturno, um curso EFA[5] de Contabilidade. Atualmente, é constituída por 16 raparigas e 11 rapazes, com a seguinte distribuição de idades (referentes ao início do ano letivo).

Tabela 2: Distribuição de idades por género, no início do ano letivo 2018/2019.

Idade / Género	15	16	17	18	TOTAL
Masculino	3	5	3	–	11
Feminino	5	10	–	1	16
TOTAL	8	15	3	1	27

A idade média dos alunos, no início do ano letivo, era de 15,9 anos, um pouco abaixo do valor da média apontado pela professora cooperante como normal para a frequência do 11.º ano de escolaridade. Consequentemente, estamos perante uma turma na qual a grande maioria dos alunos tem um percurso escolar sem retenções.

Um dos alunos de 17 anos encontrava-se inscrito no 12.º ano de Ciências e Tecnologia, apesar de ter sido integrado na turma para frequentar e concluir a disciplina de Matemática. Por outro lado, com a transferência já referida, apenas permaneceram na turma duas alunas com nacionalidade estrangeira, mas só uma revelou dificuldades prevalecentes no entendimento e expressão da língua portuguesa.

Numa das reuniões do Conselho de Turma, a turma foi descrita com palavras semelhantes às seguintes: Observa-se alguma distração nas aulas, conversa e empenho insuficiente, nomeadamente em termos do trabalho extra-letivo; os alunos revelam pouca autonomia e dificuldade em comunicar os seus pontos de vista ou dúvidas. No entanto, é uma turma que também já mostrou que consegue envolver-se de forma interessada, proativa e colaborante nas atividades promovidas durante as aulas.

Nas aulas de Matemática, a implementação de tarefas de exploração acontecia no início de cada tema. Normalmente, eram desenvolvidas em duas fases: a primeira fase constava de um momento de discussão coletiva com o grupo turma, induzida pela professora a partir do quadro branco ou da projeção na parede de gráficos de funções ou tabelas, executados e manipulados na máquina de calcular; a segunda fase costumava constituir um momento de trabalho autónomo, no qual os alunos continuavam a explorar os

[5] Educação e Formação de Adultos.

conteúdos da tarefa, através da resolução de problemas que exigiam a aplicação dos procedimentos e intuições que resultaram da primeira fase, ou dedicavam-se à realização de exercícios para consolidar as conclusões retiradas durante a fase inicial.

A maior parte das aulas decorria com a integração de momentos alternados de exposição-discussão com o grupo turma, que costumavam ser seguidos de momentos de trabalho autónomo em torno de exercícios de consolidação, usualmente realizados em grupos de dois alunos. Os trabalhos de casa eram frequentes e, por vezes, integravam tarefas de investigação cuja resolução se estendia por algumas semanas.

O trabalho a pares parecia contribuir para a superação de algumas dificuldades evidenciadas pelos alunos — falta de confiança, fraca mobilização de conhecimentos prévios, falta de maturidade, distração e conversas paralelas, pouca entreajuda em grupos de maior dimensão —, notando-se maior disponibilidade para enfrentar os desafios propostos pelo professor quando estavam agrupados a pares do que quando formavam grupos de maior dimensão ou se tivesse sido requerido que trabalhassem individualmente.

Na tabela seguinte, aparecem registadas as classificações dos testes de avaliação sumativa realizados ao longo do ano e no final de cada período.

Tabela 3: Intervalos com as classificações dos testes e as notas de final de período.

Classificações	[0,4[Mau	[4,8[Insuficiente	[8,10[Suf. Menos	[10,14[Suficiente	[14,18[Bom	[18,20] Muito Bom
1º Teste	–	3	2	14	7	1
2º Teste	–	9	2	13	3	–
1º Período	–	–	4	13	10	–
3º Teste	–	2	4	11	9	1
4º Teste	–	12	5	7	3	–
Recuperação	–	7	3	2	3	–
2º Período	–	–	7	13	7	–
5º Teste	–	7	6	8	4	2
3º Período	–	–	3	16	8	–

Esta tabela revela que a maior parte dos alunos, no final do 3.º Período, conseguiu atingir um desempenho escolar positivo: 16 alunos atingiram um nível suficiente, com classificação entre 10 e 14 pontos, enquanto que 8 alunos conseguiram alcançar notas finais entre 14 e 18 pontos. Tomando em consideração os valores exatos das classificações, as médias evidenciam uma ligeira melhoria dos resultados ao longo do ano: no final do primeiro período, a turma apresentou uma média aproximada de 12,1 valores; no segundo a média foi de 12,0; no terceiro período a média foi de 12,5.

As classificações obtidas nos testes de avaliação sumativa evidenciam que, no início de cada período letivo, a incidência de classificações positivas é muito maior do que de as negativas. Contudo, a diferença entre o número de alunos com classificações positivas e negativas diminui bastante nos testes finais de cada período, chegando mesmo a ser invertida no teste final do 2.º Período.

No 3.º Período letivo só se realizou um teste de avaliação sumativa devido à reduzida extensão temporal do período letivo. Este teste integrou tópicos que foram lecionados durante a intervenção letiva e a média das cotações da turma foi de 10,7.

O gráfico da Figura 6 refere-se às médias das cotações obtidas em cada teste

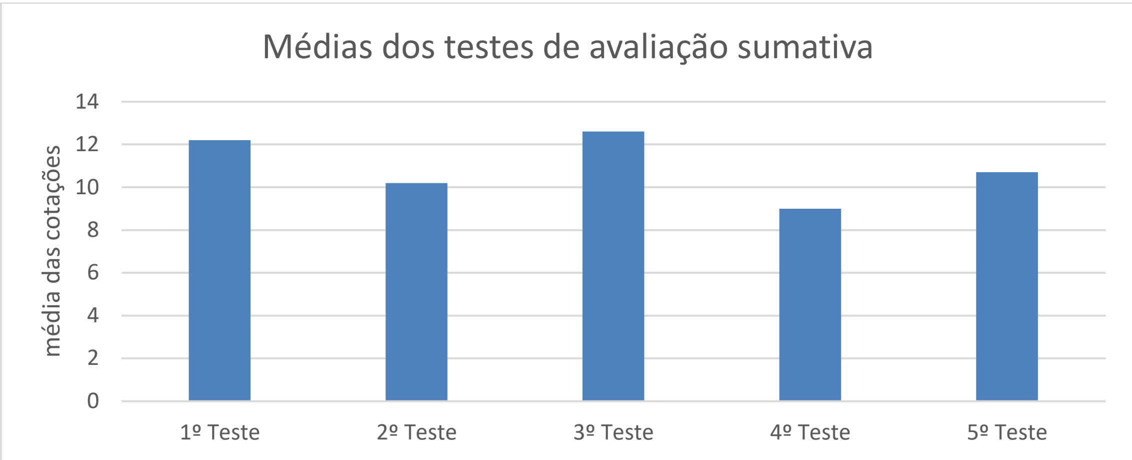


Figura 5: Valores das médias das cotações obtidas pelos alunos nos testes de avaliação sumativa.

Para além das atividades levadas a cabo durante os tempos letivos, a turma também desenvolveu, desde o início do ano letivo, um trabalho na área de Projeto de Cidadania e Desenvolvimento, dedicado ao tema Voluntariado, cuja prossecução envolveu o empenho e participação da globalidade dos elementos da turma.

3.3. Ancoragem da unidade didática no Programa

Orientações curriculares

No Programa e Metas Curriculares de Matemática A, do 11.º ano do Curso de Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas (MEC, 2014), a unidade didática que é o foco deste estudo de cariz investigativo aparece integrada no domínio Funções Reais de Variável Real, debruçando-se a prática letiva sobre alguns dos tópicos incluídos no subdomínio Limite segundo Heine de funções reais de variável real.

O estudo do limite de funções reais de variável real só é iniciado no 11.º ano, altura em que a maturidade matemática dos alunos permite enfrentar a complexidade associada à aprendizagem de conceitos, procedimentos e processos relacionados com a noção de limite, sem esquecer as conexões com as noções de continuidade e derivada, que devem ser estabelecidas a partir da compreensão do conceito de limite. No Programa e Metas Curriculares (MEC, 2014), a aprendizagem de limites de funções reais de variável real é antecedida pelo estudo do limite de sucessões, requerendo, por isso, a mobilização de conhecimentos relacionados tanto com o limite de sucessões como com as funções: leitura e interpretação do gráfico de funções; determinação do domínio de funções; manipulação de expressões algébricas; determinação algébrica do limite de sucessões.

O estudo de funções é iniciado no 7.ºano do 3.º ciclo do Ensino Básico e é caracterizado pela sua prevalência e complexidade crescente ao longo do percurso escolar, até ao final do Ensino Secundário. No 10.º ano, os alunos abordam diversos tipos de funções reais de variável real — quadrática, polinomial de grau maior que dois, definida por ramos, módulo, raiz quadrada e cúbica, composta, inversa — e algumas características, propriedades e conceitos associados às funções e às suas representações — objeto, imagem, domínio, contradomínio, paridade, injetividade, sobrejetividade, bijetividade, inversão, composição, zeros, sinal, monotonia, extremos, transformações do gráfico ou da expressão algébrica, operações algébricas, entre outras que o professor possa abordar por sua iniciativa. Anteriormente, no 8.º ano, já havia sido estudada a função afim (constante, linear e propriamente afim).

Como já foi referido, o processo de ensino aprendizagem do limite de funções começa no 11.º ano, surgindo o subdomínio Limites segundo Heine de funções reais de variável real, no Programa e Metas Curriculares, a abrir o domínio Funções Reais de Variável Real, em sequência do subdomínio referente ao Limite de sucessões que aparece no final do domínio Sucessões. Esta sequência de conteúdos permite que algumas das propriedades estudadas nos limites de sucessões (funções de domínio natural) sejam aplicadas e aprofundadas, agora, no contexto de funções de domínio real. Segundo o Programa e Metas Curriculares, "a definição de limite segundo Heine – que já é comum no Ensino Secundário – permite, de forma bastante imediata estender ao caso de funções reais a álgebra de limites estudada a propósito das sucessões" (MEC, 2014, p. 16).

Assim, é normal que a definição de limite segundo Heine origine nos alunos a necessidade de mobilizar conhecimentos relacionados com as sucessões, principalmente na manipulação e entendimento do termo geral de uma sucessão.

Os conhecimentos relacionados com as Sucessões vêm a ser incluídos nos currículos escolares desde o 6.º ano de escolaridade. Por exemplo, neste nível de escolaridade, a introdução do pensamento algébrico passa pelo reconhecimento de sequências e regularidades e pela determinação quer da lei de formação recursiva de uma sequência numérica quer de uma expressão geradora de uma sequência (MEC, 2014). No 7.º ano de escolaridade o estudo das sequências é aprofundado, sendo estas vistas como funções de modo a introduzir a análise da sua representação gráfica. Todavia, somente no 11.º ano é efetivada a obtenção do termo geral de uma sucessão, que corresponde à expressão algébrica que representa uma sucessão e pode ser usada para estudar as suas propriedades: monotonia, majorantes e minorantes, sucessão limitada, limite e convergência.

A intervenção letiva foi, contudo, levada a cabo de acordo com a planificação prevista no Plano Anual do grupo disciplinar de matemática da Escola Secundária de Camões, que determinava algumas alterações na sequência curricular apresentada no Programa. A partir do 2.º período letivo de 2018/2019 e até ao 12.º ano, a planificação, lecionação e avaliação interna em Matemática A passaria a ter por base as Aprendizagens Essenciais em articulação com o Perfil dos Alunos. Por exemplo, depois da lecionação dos limites de sucessões, o processo de ensino-aprendizagem das funções reais de variável real devia iniciar com a introdução de um novo tipo de funções — as funções racionais — e de algumas das suas características gerais (incluindo as suas assíntotas), em vez de prosseguir com o estudo do limite de funções reais de variável real como aparece previsto no Programa e Metas Curriculares.

O subdomínio dedicado ao limite de funções reais de variável real, por conseguinte, só começou a ser lecionado após revisão de alguns tópicos sobre funções (domínio, contradomínio) e depois da abordagem letiva em torno das funções racionais que incluiu a construção e análise da representação gráfica deste tipo de funções, a simplificação da sua expressão algébrica e a identificação, representação e determinação de assíntotas horizontais e verticais e das condições que as definem.

As Aprendizagens Essenciais sugerem que, em certos casos, o desenvolvimento de "competências matemáticas complexas pode requerer estratégias de ensino diferentes daquelas usadas para desenvolver competências matemáticas básicas" (ME, 2018, p.3). Neste documento é, ainda, acrescentado que "a tecnologia é uma ferramenta cada vez mais presente na sociedade (…) e também um recurso essencial no ensino, ajudando os alunos a perceber as ideias matemáticas, a raciocinar, a resolver problemas e a comunicar" (ME, 2018 p.3).

Em detrimento de uma abordagem a partir da definição de limite — como parecem preconizar as Metas Curriculares —, considerei, assim, ser mais adequado seguir uma das recomendações do Programa de Matemática A de 2002: "O conceito de limite, a ser formalizado mais tarde, deve ser utilizado de forma intuitiva" (ME, 2002, p. 6). Optei por iniciar com uma abordagem gráfica que envolvesse os alunos na descoberta das propriedades e características essenciais do conceito de limite, pressupondo que, após a abordagem inicial, o reconhecimento das mesmas propriedades e características, agora efetuado a partir da definição formal, pudesse contribuir para aproximar a imagem construída mentalmente do "conceito definição".(Tall & Vinner, 1981).

Na experiência de ensino tentei conciliar as orientações que constam nos documentos das Aprendizagens Essenciais e do Perfil dos alunos com aquelas que o Programa e Metas Curriculares fornece. Por exemplo, a abordagem gráfica acabou por ser complementada a partir da exploração da definição formal do conceito de limite, baseada na seguinte meta curricular:

> Identificar, dada uma função real de variável real e um ponto $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ como «limite de $f(x)$ quando x tende para a» quando a for aderente ao domínio D_f de f e para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f convergente para a, $\lim f(x_n) = b$, justificar que um tal limite, se existir, é único, representá-lo por «$\lim\limits_{x \to a} f(x)$», referir, nesta situação, que «$f(x)$ tende para b quando x tende para a» e estender esta definição e propriedade ao caso de limites infinitos. (MEC, 2014, p. 36)

Na tabela 4, é estabelecida uma correspondência entre a ordem de lecionação de cada aula de 90 minutos, os tópicos matemáticos a tratar, os objetivos de aprendizagem previstos e o tipo de tarefa que foi utilizado.

Após a intervenção letiva, na primeira semana do terceiro período letivo, ainda foi proposta, monitorizada e corrigida uma tarefa com exercícios de consolidação sobre operações com limites que introduzia algumas indeterminações, em colaboração com a orientadora cooperante.

Depois da intervenção letiva, o estudo do limite de funções foi concluído, ao fim de duas semanas, com um momento avaliação sumativa, mediante a realização de um mini teste. Estas duas semanas foram dedicadas ao estudo de operações entre limites e à identificação e levantamento de indeterminações, gráfica e algebricamente. No entanto, é importante assinalar que o conhecimento das propriedades, conceitos e processos estudados ao longo da intervenção letiva também teve, e terá, de ser mobilizado como conhecimento prévio quando, no terceiro período letivo e no 12.º ano, os tópicos, referentes tanto à continuidade de uma função num ponto do seu domínio como à determinação da sua derivada, forem lecionados. Contudo, convém realçar que os conhecimentos relacionados tanto com a concetualização como com os processos envolvidos no estudo de limites também serão fundamentais para a prossecução do estudo da Matemática ao nível universitário.

Tabela 4: Planificação da unidade didática			
Aulas	**Tópicos**	**Objetivos**	**Estratégias/Recursos**
1ª Aula 25/03/2019	1) Limites de sucessões; 2) Limites no infinito de funções reais de variável real;	1) Explorar graficamente o conceito de limite. 2) Criar uma noção intuitiva de limite. 3) Identificar graficamente limites de funções no infinito	1) Visualização de gráficos dinâmicos (Geogebra); 2) Tarefa de exploração (tarefa 1); 3) Máquina de calcular gráfica.
2ª Aula 27/03/2019	1) Pontos aderentes e aderência de um conjunto; 2) Limite de uma função num ponto aderente ao domínio; 3) Definição de limite segundo Heine.	1) Compreender o conceito de aderência a um conjunto; 2) Investigar graficamente o limite num ponto aderente ao domínio; 3) Explorar graficamente a definição de limite de Heine.	1) Discussão coletiva em torno da noção de ponto aderente e da definição de limite segundo Heine. 2) Visualização de gráficos dinâmicos (Geogebra); 3) Máquina de calcular gráfica.
3ª Aula 29/03/2019	1) Definição de limite segundo Heine.	1) Explorar e compreender a definição de limite segundo Heine; 2) Justificar conjeturas e afirmações matemáticas aplicando a definição segundo Heine.	1) Tarefa de exploração (tarefa 2); 2) Visualização de gráficos; 3) Máquina de calcular gráfica.
4ª Aula 01/04/2019	1) Definição de limite segundo Heine; 2) Limites laterais; 3) Limite de uma função num ponto aderente ao respetivo domínio.	1) Fazer a prova de resultados, analiticamente; 2) Determinar graficamente limites laterais, limites no infinito e limites num ponto aderente. 3) Relacionar a determinação algébrica de limites com a interpretação gráfica.	1) Tarefa de exploração (tarefa 3). 2) Máquina de calcular gráfica
5ª Aula 03/04/2019	1) Todos os tópicos abordados nas aulas anteriores	2) Compreender conceito de limite lateral; 3) Consolidar conhecimentos adquiridos nas aulas anteriores	1) Discussão coletiva em torno da noção de limite lateral; 2) Questão aula; 3) Máquina de calcular gráfica.

Além da íntima relação entre limites e as noções de continuidade e derivada num ponto, os conhecimentos sobre limites também são essenciais para a compreensão da noção de integral e de algumas das suas características: equiparação entre o cálculo do integral de uma função e o cálculo da área da região existente entre a função e os eixos; integral indefinido; integral impróprio. A unidade didática contemplou cinco aulas de 90 minutos e iniciou no dia 25 de março de 2019 para decorrer até ao dia 3 de abril, ocorrendo depois do segundo teste de avaliação sumativa e a finalizar o segundo período letivo.

Conceitos matemáticos envolvidos

Ponto Aderente e aderência a um conjunto:

A integração curricular do conceito de ponto aderente a um conjunto ocorreu durante o estudo intuitivo do limite de uma função, levado a cabo a partir da análise dos gráficos de várias funções, tendo sido inicialmente apresentado como um ponto candidato à investigação de existência de limite duma função e determinado a partir de relações de vizinhança e da sua interseção com o domínio da função. Ao longo da intervenção letiva, o conceito de vizinhança nunca foi formalizado matematicamente porque já tinha sido utilizado anteriormente, durante as aulas consagradas ao estudo da convergência e dos limites de sucessões, e os alunos já estavam habituados a aplicar esta noção de forma intuitiva, na leitura do limite a partir do gráfico de uma sucessão.

A aproximação intuitiva ao conceito de ponto aderente acabou por ser complementada com a apresentação de uma definição cujo enunciado era idêntico ao previsto pela meta curricular:

"Identificar, dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, a como «ponto aderente a A» quando existe uma sucessão (x_n) de elementos de A tal que $\lim x_n = a$" (MEC, 2014, p. 36).

Desta forma, todo o ponto a, com $a \in A$, é também um ponto aderente ao conjunto A, já que, neste caso, é sempre possível encontrar uma sucessão (x_n) de elementos de A tal que o seu limite seja a, como é o caso da sucessão constante com termo geral $x_n = a$.

Mas, um ponto a não tem de pertencer ao conjunto A para ser um ponto aderente a A. Por exemplo, sendo A um conjunto, com $A := \{1/n\}_{n=1}^{+\infty}$, apesar de $a = 0$ não constar como elemento de A, $a = 0$ é um ponto aderente a A, pois $x_n = 1/n$ é o termo geral de uma sucessão de elementos de A tal que $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Por sua vez, a aderência ao conjunto D designa o conjunto de pontos aderentes ao conjunto D e pode ser representado por $\overline{D}$.

Conceito de infinito:

Ao longo da história, o conceito de infinito sempre constituiu uma fonte de problemas e de discussões entre filósofos, místicos, matemáticos. De tal forma que, ainda hoje, é considerado como uma espécie de enigma: é difícil de aceitar que, se retirarmos um elemento a um conjunto infinito, ficam a restar exatamente o mesmo número de elementos e que este processo pode ser repetido com qualquer número de elementos, tantas vezes quantas se queira.

Aliás, foram paradoxos como este que levaram os nossos antepassados a desconfiar de argumentos que envolvessem apelos ao infinito — os paradoxos de Zenão (490-430 a.C.) são um bom exemplo de desconfiança relativamente a este conceito. Visando a ideia de infinito, o filósofo grego construiu alguns paradoxos famosos, como o Paradoxo de Aquiles e da Tartaruga: Aquiles, o herói grego, e a Tartaruga decidiram apostar numa corrida, mas, como Aquiles era mais rápido (por exemplo duas vezes mais rápido), deu uma vantagem de 10 metros à Tartaruga. Assim, quando Aquiles acabasse de percorrer os 10 metros que os separavam, a Tartaruga estaria cinco metros à sua frente. Ou seja, quando Aquiles chegasse ao ponto de onde a Tartaruga partiu, esta já teria andado para um ponto mais à frente, correspondente a metade da distância que os separa, e assim por diante. Assim, apesar de cada vez menos distantes, nunca deixaria de haver uma distância entre ambos, ou seja, Aquiles nunca conseguiria ultrapassar a Tartaruga. Mas, numa disputa real, é certo que, sem outras condições além das referidas, Aquiles venceria a Tartaruga, ultrapassando-a ao fim de algum tempo. A distância percorrida por Aquiles, na corrida, pode ser representada por uma soma infinita das distâncias percorridas a cada instante, $10 + 5 + 2{,}5 + 1{,}25 + 0{,}625 + \ldots$, e, embora pareça impossível fazer a soma, pois ela nunca termina, o seu resultado é 20. Ou seja, Aquiles ultrapassaria a tartaruga exatamente ao fim de 20 metros — como, de resto, preveem as equações da Física e qualquer teste prático pode comprovar (Boyer, 1974).

Não obstante os gregos terem chegado a este resultado, aceitando que a soma de uma sequência infinita pode ter como resultado um valor concreto e finito (o cálculo da área de figuras geométricas, como o círculo, através da decomposição em triângulos podiam-no comprovar), ele acabava por contribuir muito pouco para a compreensão do conceito de infinito. Só com Cauchy (1789-1857), depois de ter definido o conceito de limite sem empregar argumentos geométricos, passou a ser possível uma compreensão do infinito que respeitasse os critérios de rigor e coerência próprios da Matemática. Assim, em vez de se dizer que $10 + 5 + 2{,}5 + \ldots$ é igual a 20, será mais correto afirmar que as somas parciais finitas tendem para 20, atingindo 20 no infinito, ou, em vez de pensar que uma sequência é infinita, pode pensar-se que esta é tão longa quanto se queira (Boyer, 1974).

A partir dos trabalhos de Cantor (1845-1918), pode considerar-se que um conjunto S é infinito quando é equipotente a uma parte própria dele mesmo, caso contrário S é um conjunto finito. Este matemático também provou que existem dois tipos de infinitos matemáticos. O infinito potencial formado pelos conjuntos infinitos enumeráveis como o conjunto dos números inteiros, o conjunto dos números racionais, o conjunto dos quadrados perfeitos, entre outros. Cantor provou, através de correspondências biunívocas, que estes conjuntos têm o mesmo número de elementos. E o infinito atual ou real, formado por conjuntos infinitos não enumeráveis como os conjuntos dos números reais e dos números complexos. Estes conjuntos contêm elementos que não é possível representar ou enumerar. (Dauben, 1990).

Isto pode explicar as opções tomadas na construção dos programas curriculares em relação ao estudo de limites, tornando mais clara a necessidade de dividir este estudo em duas etapas fundamentais: a primeira relacionada com o estudo de limites de conjuntos infinitos enumeráveis — limites de sucessões — e o estudo de limites de conjuntos infinitos contínuos ou não enumeráveis — limites de funções reais de variável real (Dauben, 1990).

Definição de limite de uma função num ponto aderente ao domínio da função:

O programa atual manteve a opção do Programa de 2002 de utilizar curricularmente a definição de limite de uma função real de variável real segundo Heine, em detrimento da definição de Cauchy cujo uso só é previsto, nos dois programas, quando se trata de sucessões. De qualquer forma, as duas definições de limite são equivalentes, como pode ser mostrado através de uma das demonstrações apresentadas por Sebastião e Silva, no 2.º volume do "Compêndio de Matemática". Tratando-se de uma demonstração por processo de equivalência, esta aparece dividida em dois passos: primeiro, é demonstrado que a definição de Heine implica a de Cauchy; depois, é demonstrado que a de Cauchy implica a de Heine.

Demonstração (adaptado de Silva, 1976, pp. 132-135)**:**

Tendo em consideração a definição de limite de Cauchy (adaptada ao programa de 2014, ou seja, a é ponto aderente ao domínio de f , D_f):

Diz-se que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ segundo Cauchy se e só se

$$\forall_{\delta>0}\, \exists_{\varepsilon>0}: \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D_f}, \boldsymbol{0} \leq |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}| < \boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{b}| < \boldsymbol{\delta}$$

E a definição de limite segundo Heine, presente no programa e metas curriculares:

Sejam $f: D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, a um ponto aderente ao seu domínio e $b \in \mathbb{R}$ ou $b = \pm\infty$.

Diz-se que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ se e somente se $f(x_n) \longrightarrow b$ para qualquer sucessão (x_n), em que $x_n \in D$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $x_n \longrightarrow a$.

(adaptado de MEC, 2014).

1º passo: Suponhamos que a proposição **(1)** $f(x) \to b$ quando $x \to a$, é verdadeira segundo Cauchy. Agora, queremos provar que a proposição **(1)** também é verdadeira, segundo Heine, isto é, que $f(u_n) \to b$, sendo (u_n) uma sucessão qualquer definida no domínio[6] de *f*(*x*) tal que $u_n \to a$, também é verdadeira.

Como consideramos a definição de Cauchy verdadeira. Logo,

$\boldsymbol{\lim\limits_{x \to a} f(x) = b} \Leftrightarrow \forall_{\delta>0}\, \exists_{\varepsilon>0}: \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D_f}, \boldsymbol{0 \leq |x-a| < \varepsilon} \Rightarrow \boldsymbol{|f(x)-b| < \delta}$, é verdadeira **(2).**

Seja δ um número positivo arbitrário. Então existe um número positivo ε tal que

$|u_n - a| < \varepsilon \underset{n}{\Rightarrow} |f(u_n) - b| < \delta$ pois admitimos, por hipótese, que a definição de Cauchy é verdadeira.

Por outro lado, como $u_n \to a$, existe um número *p* tal que $n > p \underset{n}{\Rightarrow} |u_n - a| < \varepsilon$ já que terá de existir uma ordem p, para a qual $|u_n - a| < \varepsilon$ pois os termos de u_n estão a aproximar-se de a.

Logo, para esse valor de *p*, $n > p \underset{n}{\Rightarrow} |f(u_n) - b| < \delta$

E, como δ pode ser um número positivo qualquer, isto significa que $f(u_n) \to b$ e que a proposição **(1)** é verdadeira segundo Heine.

2º passo: Suponhamos que a existência de limite é verdadeira segundo Heine.

Queremos provar que também é verdadeira segundo Cauchy; ou seja, queremos provar **(2)** $\forall_{\delta>0}\, \exists_{\varepsilon>0}: \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D_f}, \boldsymbol{0 \leq |x-a| < \varepsilon} \Rightarrow \boldsymbol{|f(x)-b| < \delta}$

A sugestão, neste caso, é de usarmos o método de demonstração por redução ao absurdo. Suponhamos que a proposição **(2)** é falsa, isto é, suponhamos o seguinte: Existe pelo menos um $\delta > 0$ tal que: $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, x : |x-a| < \varepsilon \wedge |f(x)-b| \geqslant \delta$ **(3)**

[6] A demonstração foi adaptada à definição de limite segundo Heine vigente no programa e metas curriculares.

Seja $\delta_0 > 0$ um δ que verifica esta condição e seja n um número natural qualquer. Como $1/_n > 0$, conclui-se de **(3)**, com $\varepsilon = 1/_n$, que existe pelo menos um x tal que

(4) $|x-a| < \frac{1}{n} \wedge |f(x)-b| \geq \delta_0$

Seja x_n um determinado valor de x que verifica esta condição, escolhido arbitrariamente (pode haver mais de um!). Assim, a cada $n \in \mathbb{N}$, fizemos corresponder um (e um só!) número real x_n que verifica as condições seguintes:

$$|x_n-a| < \frac{1}{n} \quad , \quad |f(x_n)-b| \geqslant \delta_0 \qquad (\forall n)$$

Por conseguinte, como para cada n, obtemos um valor para x_n que obedece à primeira condição referida, portanto essa sucessão de termos converge para a deduzindo-se:

(5) $\boldsymbol{x_n \to a}$

Da mesma forma, a partir da segunda condição podemos deduzir

(6) $\boldsymbol{f(x_n) \nrightarrow b}$ pois, a cada valor de n corresponde um valor $f(x_n)$, tal que

$$|f(x_n)-b| \geqslant \delta_0 \qquad (\forall n)$$

Assim, pode concluir-se que a proposição $f(x) \to b$ quando $x \to a$ é falsa, segundo Heine. Mas, como isto vai contra a hipótese inicial, fica, portanto, provado por redução ao absurdo o que pretendíamos, ou seja, que as duas definições são equivalentes.

Por outro lado, se compararmos as definições de limite apresentadas nos dois programas, depreende-se que existe uma subtil diferença entre ambas que vai originar, no entanto, importantes consequências práticas.

Definição presente no programa atual (adaptado de MEC, 2014):

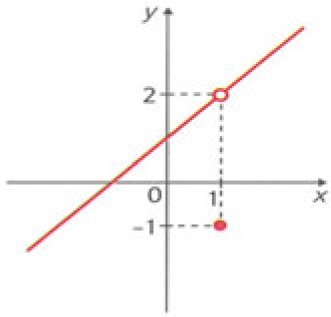
Sejam $f: D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, a um ponto aderente ao seu domínio e $b \in \mathbb{R}$ ou $b = \pm\infty$.

Diz-se que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ se e somente se $f(x_n) \longrightarrow b$ para qualquer sucessão (x_n) , em que $x_n \in D$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e $x_n \longrightarrow a$.

Definição presente no programa anterior (ME, 2002):

Diz-se que b é limite de f no ponto a ou quando x tende para a se, para qualquer sucessão (x_n) de elementos de X, distintos de a, tal que $x_n \to a$, se tem $f(x_n) \to b$.

No programa atual, optou-se por uma versão da definição que consiste em admitir todas as sucessões (x_n) cujos termos correspondem a valores que pertencem ao domínio da função, podendo assumir, ou não, o valor de a. Porém, a definição de limite segundo Heine, que consta no programa de 2002, admite somente a determinação do limite por valores diferentes de a, isto é, apenas admite as sucessões definidas no domínio da função que nunca assumem o valor de a. Assim, dada uma função *f*, supondo que se pretendesse investigar o limite de *f(x)* quando $x \to 1$, $\lim_{x \to 1} f(x)$, por exemplo, as sucessões $u_n = 1$ e $v_n = \frac{2n^2+(-1)^n n+n}{2n^2}$ não respeitam as condições da definição de limite por valores diferentes de 1 já que ambas contêm uma infinidade de termos iguais a 1 (Silva, 1976). Outro exemplo, resultante da diferença entre as duas definições, advém da existência, ou não, de limite em funções com gráficos que incluem pontos isolados. A função *f*, representada ao lado por um gráfico, tem limite, quando $x \to 1$, de acordo com a definição do programa anterior, mas já não existe $\lim_{x \to 1} f(x)$ de acordo com a definição do currículo atual.



A opção por esta subtil alteração foi intencional, já que a definição presente no programa vigente acaba por acarretar algumas vantagens relativamente à versão anterior:

1) É mais simples de formular, porque não exige uma condição que obrigue as sucessões definidas no D_f (domínio de *f*) a tenderem para *a* por valores diferentes de *a*. Segundo a definição do programa anterior, a existência de limite só podia ser investigada nos pontos de abcissa *a* relativamente aos quais fosse possível definir uma sucessão de valores do D_f tendente para *a* por valores diferentes de *a* e, isto, podia ser explicitado de forma equivalente se, na formulação da definição, fosse requerido que *a* correspondesse a um ponto de acumulação do D_f. Daí, *a* ter de ser um ponto aderente ao D_f, na definição de limite segundo Heine que consta no programa curricular em vigor.

2) A definição segundo Heine incluída no programa curricular anterior obrigava a cuidados suplementares, de forma a evitar erros no enunciado de determinadas propriedades dos limites. Um exemplo de erro pode ser evidenciado a partir do enunciado de algumas das propriedades das operações entre limites.

Se duas funções f(x), g(x) *tendem para limites finitos quando* x *tende para um limite* a *(finito ou infinito), também a soma, a diferença e o produto dessas funções tendem para limites finitos quando* x → a *e será:*

$$\text{III.} \quad \lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\text{IV.} \quad \lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\text{V.} \quad \lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

Figura 6: Operações entre limites (Silva, 1963).

Muitos manuais escolares apresentam um texto semelhante quando fazem alusão às propriedades das operações entre limites, não referindo nenhuma exceção ou contrariedade. Por exemplo, supondo $f(x) = \sqrt{x-2}\ e\ g(x) = \sqrt{2-x}$, facilmente chegamos à conclusão que $\lim_{x \to 2} f(x) = 0\ \ e\ \lim_{x \to 2} g(x) = 0$, sendo $x = 2$ um ponto de acumulação dos domínios de *f* e de g $(D_f = [2, +\infty\,[\ \ e\ \ D_g =]-\infty, 2]\ )$. Contudo, sendo $D_{f+g} = \{2\}$, então $x = 2$ não é ponto de acumulação da função *f* +g, pois não encontramos nenhuma sucessão de valores do D_{f+g} que tenda para 2 por valores diferentes de 2. Logo, pela definição incluída no programa anterior não existe $\lim_{x \to 2}(f + g)$, contrariando o texto da propriedade III.

No entanto, se pensarmos no mesmo exemplo, mas relacionando-o com a definição proposta no programa atual, em vez da do anterior, verificamos que 2 é um ponto aderente ao $D_{f+g} = \{2\}$ já que, neste caso, encontramos, por exemplo, uma sucessão definida no D_{f+g} que tende para 2 por valores iguais a 2 (por exemplo a sucessão constante $u_n = 2$). Logo, pela definição incluída no programa atual, existe $\lim_{x \to 2}(f + g)$, igual a 0. Portanto, segundo esta definição, $\lim_{x \to 2}(f + g) = \lim_{x \to 2} f(x) + \lim_{x \to 2} g(x)$, o que já não contraria a propriedade III.

Sintetizando, o domínio das funções $f + g; f - g; f.g$ pode reduzir-se ao ponto *a* e, nestes casos, *a* não é ponto de acumulação dos domínios destas funções (mas é ponto aderente de todas elas), ainda que seja ponto de acumulação (e ponto aderente) de cada um dos domínios de *f* e *g*. Assim, nestes casos e segundo a definição vigente, as propriedades referidas como III; IV e V, conseguem ter validade para a universalidade das funções, embora esta validade não possa ser assegurada através da definição do programa datado de 2002.

3) No mesmo sentido que 2), a definição de limite adotada no programa de 2014 permite que a definição e as propriedades da noção de continuidade sejam enunciadas sem necessidade de ressalvas relativas aos domínios de funções, já que a terá de ser elemento do domínio, tanto de f e g como de $f + g$; $f - g$; $f \,.\, g$ ou mesmo de $f\,/\,g$, desde que $g\ (a) \neq 0$.

   Por outro lado, também simplifica a definição de uma função contínua no ponto de abcissa a: Dada uma função real de variável real f e um ponto de abcissa a , em que $a \in D_f$, a função f é contínua em a quando o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, ou seja, quando $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

4) A definição de limite do programa atual acaba por garantir a existência do limite de uma função num ponto isolado do seu domínio, também assegurando a continuidade da função em qualquer ponto isolado do seu domínio.

Contudo, também pode apontar-se à "nova definição" a desvantagem de contrariar algumas as intuições formadas nos alunos aquando da investigação da continuidade de uma função. Por exemplo, segundo a "nova definição", o gráfico da função $n(x)$, corresponde ao gráfico de uma função contínua no seu domínio.

$$n(x) = \begin{cases} -2 & , x = -1 \\ -1 & , x = 1 \\ 3 & , x = 2 \\ 2 & , x = 3 \\ 1 & , x = 4 \end{cases}$$ é contínua pois todos os pontos do seu domínio $D_n = \{-1, 1, 2, 3, 4\}$ são pontos isolados.

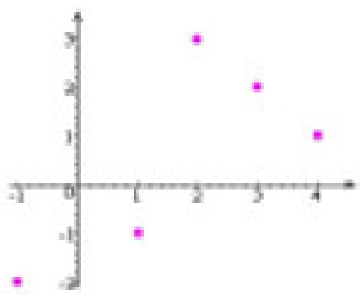


Figura 7: Exemplo de uma função contínua.

De maneira a facilitar a compreensão da definição de limite segundo Heine do programa curricular em vigor, esta definição foi decomposta em três elementos:

O limite de uma função f, quando $x \to a$, pode ser representado por $\lim_{x \to a} f(x)$. Este limite existe e tem valor b, ou seja, $\lim_{x \to a} f(x) = b$ ($b \in \mathbb{R}$ ou $b = -\infty$ ou $b = +\infty$), se e só se:

a) a for ponto aderente ao D_f (verificar se existe pelo menos uma sucessão definida em D_f tal que $u_n \rightarrow a$, seja por valores à esquerda (a^-) ou por valores à direita (a^+) ou por valores iguais a a)

b) $\lim f(u_n) = \lim f(v_n) = \lim f(w_n) = b$ (primeiro, averiguar quais as sucessões cuja aproximação ao valor a pode ser obtida por valores do domínio da função f, ou seja, se $u_n \rightarrow a^-; v_n \rightarrow a^+ \; e \; w_n = a$ podem ser definidas no D_f; depois verificar se as suas imagens pela função f formam sucessões que tendem para o mesmo valor b, determinando $\lim f(u_n)$; $\lim f(v_n)$; $\lim f(w_n)$)

Limites laterais:

Limite lateral à direita ou por valores superiores: Supondo a aderente a $]a,+\infty[\; \cap D_f$ existe limite b de uma função f para valores superiores ou à direita de a, se, e só se, para todas as sucessões em que lim $u_n = a^+$ (ou seja, quando $u_n \rightarrow a^+$), $\lim f(u_n) = \lim f(a^+)$ $=b$.

O limite lateral à direita de a, ou por valores superiores a a, pode ser representado por $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

Limite lateral à esquerda ou por valores inferiores: Supondo a aderente a $]-\infty,a[\; \cap D_f$, existe limite b de uma função f para valores inferiores ou à esquerda de a, se, e só se, para todas as sucessões em que lim $u_n = a-$ (ou seja, quando $u_n \rightarrow a-$), $\lim f(u_n) = \lim f(a-) = b$.

O limite lateral à esquerda de a, ou por valores superiores a a, pode ser representado por $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.

Atenção: Os limites laterais para $x \rightarrow a^+$ ou $x \rightarrow a^-$ só devem ser estudados quando fizerem sentido no domínio da função.

Limite de uma função num ponto com valor finito:

Limite de uma função num ponto que não pertence ao domínio de f, D_f: Supondo a aderente a D_f, apesar de não pertencer ao domínio de f, existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ se, e só se, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, sendo o valor de $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ igual ao de $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

Limite de uma função num ponto que pertence ao domínio de f, D_f: Supondo que a pertence ao domínio da função f (logo, a é obrigatoriamente aderente ao domínio de f), existe $\lim_{x \to a} f(x)$ se, e só se, $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, sendo o valor de $\lim_{x \to a} f(x)$ igual ao valor de $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Consequentemente, quando uma função *f* admite limite num ponto do seu domínio, isto significa que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Num ponto isolado do domínio de *f*, com abcissa $x = a$, existe limite e $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

<u>Limites no infinito:</u>

A definição deste tipo de limites pode ser deduzida da definição segundo Heine de limite num ponto: em vez de considerar $x \to a$, sendo a um ponto aderente ao D_f, deve considerar-se que $x \to +\infty \; ou \; x \to -\infty$ desde que D_f não corresponda a um conjunto majorado ou minorado, respetivamente.

Seja *f* uma função de domínio D_f não majorado e $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$ ou $b = -\infty$. Diz-se que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$ se, para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f com limite $+\infty$, a sucessão $(f(x_n)$ tem limite *b*.

Seja *f* uma função de domínio D_f não minorado e $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$ ou $b = -\infty$. Diz-se que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$ se, para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f com limite $-\infty$, a sucessão $(f(x_n)$ tem limite *b*.

Nota: Os limites, se existirem, são únicos. Basta atender à unicidade de limites já referida durante o estudo das sucessões.

Por outro lado, nesta secção não me refiro às operações com limites nem às indeterminações porque estes aspetos não foram lecionados durante a intervenção letiva. Contudo, estes tópicos integraram a Tarefa 4, desenvolvida em sala de aula cerca de um mês depois da intervenção. Esta tarefa foi utilizada no estudo de cariz investigativo com o objetivo de verificar se os alunos continuavam a empregar a sua capacidade argumentativa, nas atividades de aprendizagem, mesmo que no enunciado da tarefa não fosse fornecida qualquer tipo de sugestão para a construção dos argumentos. Por isso, apenas faço alusão a estes tópicos na descrição da tarefa 4.

Recursos e estratégias de ensino

A seleção e planificação das estratégias de ensino adotadas durante a lecionação da unidade didática tiveram em conta três fatores descritos nesta subsecção da Ancoragem da Unidade Didática: as orientações e objetivos previstos nos documentos curriculares, dos quais destaco as Aprendizagens Essenciais em articulação com o Perfil dos Alunos, que muitas vezes substituíram ou complementaram o Programa e Metas Curriculares de Matemática A; o objetivo do estudo focado na argumentação matemática dos alunos na aprendizagem do limite de uma função; as observações recolhidas presencialmente e as inter-relações estabelecidas com os alunos no primeiro e no segundo período letivo, durante os quais assisti a grande parte das aulas e acabei por lecionar quatro aulas de 90 minutos. Além destes fatores, não posso esquecer o contributo do feedback e do aconselhamento das orientadoras envolvidas na supervisão da minha prática letiva, em particular da orientadora cooperante.

O grupo disciplinar de Matemática da Escola Secundária de Camões elaborou a planificação para o segundo e terceiro período baseando as suas opções curriculares nas orientações e objetivos delineados pelas Aprendizagens Essenciais em articulação com o Perfil dos Alunos. Para além de considerações sobre o défice existente entre o número de aulas possíveis e o número de aulas necessárias para cumprir os objetivos traçados no Programa e Metas Curriculares e sobre as dificuldades de aprendizagem associadas à abordagem de cariz formal defendida neste documento, o grupo disciplinar de Matemática deliberou que o estudo de funções reais de variável real seria beneficiado se fosse estabelecido um enfoque em torno da visualização e manipulação de representações gráficas de funções. Para entender o alcance desta decisão, convém ter presente que a visualização matemática corresponde à capacidade dos alunos de representar um esquema ou diagrama adequado (mentalmente, com papel e lápis ou com base no computador) a um conceito matemático ou problema, ou de reconhecer uma representação e saber usá-lo com a intenção de alcançar a sua compreensão (Cunningham & Zimmermann, 1994). A visualização matemática é, assim, um processo de formar imagens e utilizá-las eficazmente na descoberta e compreensão matemáticas. Desta forma, pretendia-se que o estudo do limite de funções, em especial, não ficasse centrado exclusivamente em torno da sua definição formal, como aparece previsto no Programa e Metas Curriculares.

Tall e Vinner (1981) consideram que o processo de ensino e aprendizagem da definição dos conceitos de limite e continuidade deve ser constituído em espiral: introduzir o conceito contextualmente através de exemplos específicos, que podem ser constituídos a partir de uma abordagem gráfica, e logo voltar a esses exemplos em determinados momentos, de modo que a definição formal do conceito se vá desenvolvendo subtilmente. Segundo Tall (1992), os alunos que trabalham com poucas imagens mentais não estão realmente a aprender Matemática e a sua atividade de aprendizagem consiste num conjunto de algoritmos que obedecem a regras procedimentais e cujo conhecimento vai informá-los sobre quando devem ser aplicados cada algoritmo. A visualização pode modificar esta situação ajudando-os a criar representações mentais ricas dos conceitos, em vez de se restringirem a um trabalho de mero cálculo.

A visualização e manipulação dos gráficos de funções também ia ao encontro do objetivo do estudo de cariz investigativo desenvolvido ao longo da prática letiva, pois a capacidade de representar e de usar as representações pode contribuir para que os alunos produzam explicações, formulem questões e escrevam argumentos matematicamente coerentes, tanto para si mesmos como para os professores e para os colegas (NCTM, 2007).

Na Matemática em geral, e nas funções em particular, o raciocínio visual pode assumir um papel importante no processo de prova matemática, porque é admissível que os alunos constituam uma argumentação baseando as suas justificações em dados visuais, ou construindo conjeturas a partir de propriedades intuídas (NCTM, 2007).

Como o raciocínio visual parece ter um papel importante tanto na descoberta e compreensão de objetos matemáticos como na construção de argumentos, resolvi adotar estratégias e recursos que permitissem alargar e explorar o naipe de representações do conceito de limite à disposição dos alunos e iniciar o estudo de limites a partir de uma aproximação intuitiva ao conceito de limite. Efetuar a abordagem inicial do conceito de limite a partir da sua definição formal, pode revelar-se muito difícil, porque os alunos ainda não dispõem dos aspetos intuitivos que contribuem para a sua compreensão (Tall & Vinner, 1981), pelo que estes devem ser motivados através da resolução de tarefas onde "os alunos têm de mobilizar os seus conhecimentos intuitivos" (Ponte, 2005, p. 18) e não só a destreza na manipulação algébrica.

Após ter constatado que todos os alunos possuíam máquina de calcular gráfica (quase todas do mesmo modelo), a utilização de tarefas de exploração, que permitissem usufruir das potencialidades da calculadora na leitura e construção de representações gráficas e tabelares, foi uma das estratégias intencionalmente delineada e usada para cumprir os propósitos já indicados.

"Uma *exploração* é uma tarefa aberta e acessível à maioria dos alunos" (Ponte, 2014, p. 21) e este tipo de tarefas é essencial para o desenvolvimento de certas capacidades nos alunos, como a autonomia, a capacidade de lidar com situações problemáticas e as capacidades de raciocinar, comunicar e argumentar matematicamente. Numa abordagem de tipo exploratório, o trabalho é centrado no aluno com a intenção de criar oportunidades de aprendizagem significativa (Ponte, 2005). Assim, a preparação das tarefas de exploração exige que se dê muita importância à planificação das várias fases que as compõem e à antecipação das dificuldades que possam emergir da resolução das tarefas propostas, assim como das questões que podem contribuir para os alunos desbloquear e ultrapassar situações de dificuldade (Canavarro, 2011).

No ensino exploratório, a aprendizagem dos alunos é encarada como um processo de construção em que, perante a existência de erros nas respostas, estas devem ser recuperadas e reajustadas de forma a desenvolver uma aproximação dinâmica que conduza à sua correção, em vez de serem imediatamente retificadas pela ação de correção do professor. É mediante este processo de exploração, no qual os alunos vão ter de se debater com os erros cometidos em vez de aprenderem apenas a resposta certa, que os alunos compreendem os verdadeiros significados (NCTM, 2007). Com a aplicação deste tipo de tarefas, os alunos têm a possibilidade de ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgir com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades matemáticas (Canavarro, 2011). Ponte (2005) acrescenta ainda que as explorações são especialmente apropriadas para colocar os alunos perante situações que os desafiem a clarificar ideias e raciocínios, oralmente ou por escrito.

Desta forma, embora a intenção de integrar a máquina de calcular tenha concorrido a favor da utilização de tarefas exploratórias, esta opção teve sobretudo a ver com dois aspetos fundamentais: por um lado, e confirmando o que atrás ficou escrito, porque podiam contribuir para a promoção da aprendizagem significativa dos processos e conceitos implicados no estudo dos limites de uma função; por outro lado, porque permitiam fomentar contextos de aprendizagem que, além dos objetivos subjacentes às aprendizagens, incentivavam os alunos a empregar a sua capacidade argumentativa na exploração das questões e problemas suscitados pelas tarefas ou nas discussões coletivas que integraram o processo de realização das explorações.

As questões e problemas propostos nas tarefas de exploração e na questão aula requeriam que os alunos tentassem explicitar os seus raciocínios através do encadeamento de afirmações ou da apresentação e articulação coerente de outro tipo de representações não verbais. Isto é, requeriam que os alunos construíssem argumentos com a finalidade de justificar afirmações ou resultados e de construir ou confirmar conjeturas, ou, ainda, em processos de prova e na apresentação de contraexemplos. De acordo com as Aprendizagens Essenciais, os alunos devem ser capazes de argumentar com lógica e recorrer, sempre que for aconselhável, à linguagem simbólica, enquanto que o professor deve levar o aluno a verbalizar os raciocínios e discutir processos de resolução, confrontando-os com os raciocínios dos seus colegas (ME, 2018).

Como grande parte dos alunos costuma evidenciar pouca predisposição para explicar e justificar os seus raciocínios ou revelar muitas dificuldades na identificação, construção e refutação de argumentos, orais ou escritos, cabe ao professor orientá-los e incentivá-los de maneira a integrarem a argumentação na exposição das suas ideias. Decidi, portanto, incluir no enunciado de algumas tarefas uma sugestão similar à seguinte: **Dado que** <u>(explicar factos),</u> **então** <u>concordo ou não concordo que…</u> (conclusão), **porque** <u>(justificar em que baseio o raciocínio)</u>.

Já, a utilização da máquina de calcular prevista para a concretização das tarefas, permitia que a construção, manipulação e observação de gráficos de funções se tornasse mais fácil e acessível para todos, favorecendo, por isso, a promoção da diferenciação pedagógica. Mas, acima de tudo, a calculadora gráfica possibilitava a manipulação de parâmetros e a observação gráfica das alterações promovidas nessas manipulações de forma rápida e relativamente simples, o que podia acarretar muitos benefícios para uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos (Dugdale, 1993). E isto, consequentemente, podia ser bastante vantajoso no que dizia respeito à rapidez de construção das conjeturas e respetivo teste de validação, já que a construção e visualização de exemplos gráficos, ou o preenchimento de tabelas com valores numéricos, são processos muito mais imediatos e suscetíveis de serem alterados quando realizados com a máquina de calcular. A calculadora pode desempenhar um papel importante no desenvolvimento do raciocínio matemático e da argumentação matemática, assim como na abrangência e na quantidade de exemplos investigados (Dugdale, 1993). O NCTM (2007) defende que as potencialidades da tecnologia não devem ser usadas de maneira a substituir o trabalho escrito em torno das representações algébricas e do cálculo na compreensão e intuição de processos e conceitos matemáticos, embora possam e devam ser aplicadas para estimular essa compreensão e intuição.

As tarefas de exploração foram realizadas mediante a organização da turma em grupos de dois alunos, aproveitando a distribuição normal dos alunos pela sala de aula. Por essa razão também havia dois grupos de três alunos, porque era normal ocuparem três lugares em volta da mesma secretária. Por vezes foi necessário formar outro grupo de três alunos porque em todas as aulas havia alunos a chegarem atrasados ao seu início.

Esta opção podia representar um impacto significativo nas aprendizagens dos alunos, visto que, segundo Vygotsky (1988), a cognição humana é uma construção sociocultural e, por isso, as interações sociais têm um papel fundamental no desenvolvimento cognitivo dos indivíduos. Por outro lado, Ponte, Boavida, Graça e Abrantes (1997) referem que

> trabalhar em pequeno grupo permite aos alunos expor as suas ideias, ouvir os seus colegas, colocar questões, discutir estratégias e soluções, argumentar e criticar argumentos. (...) torna-se mais fácil arriscar os seus pontos de vista, avançar com as suas descobertas (p. 19).

No mesmo sentido, a opção pelo trabalho a pares teve três razões subjacentes: em grupo, os alunos lidam com problemas que podem estar para além das possibilidades de cada um trabalhando individualmente; o trabalho em grupo, ao implicar interações, deliberações e a negociação de consensos, parecia mais adequado para estimular a capacidade argumentativa dos alunos; os modos de trabalho observados na turma, durante as aulas assistidas, revelaram que os seus elementos não estavam habituados a trabalhar em grupos com mais de três membros e, quando tal aconteceu, a reação não foi positiva, motivando grande distração e pouco empenho nos elementos de cada grupo.

As tarefas de exploração foram implementadas em três fases (Christiansen & Walter, 1986): 1) Introdução ao tópico matemático focado na exploração e apresentação do enunciado aos alunos; 2) Momento de trabalho autónomo dos alunos, dedicado à resolução da tarefa; 3) Discussão coletiva em torno das resoluções apresentadas pelos alunos que procurava envolver todo o grupo turma.

As tarefas foram distribuídas em papel, explicitando-se o tempo previsto para a sua duração, os recursos disponíveis para a sua realização e algumas regras de conduta que os alunos deviam cumprir (utilização de caneta; formar grupos de dois elementos, no máximo três; escrever as respostas no enunciado da tarefa, entregar um dos enunciados — cada par de alunos recebia dois enunciados — depois da discussão; o enunciado entregue não deve ser retificado durante a discussão). Tomando em conta o formato habitual das explorações desenvolvidas antes da intervenção letiva, decidi que as apresentações das tarefas de exploração deviam incluir uma introdução dos assuntos a explorar.

A introdução dos tópicos a explorar na tarefa não era realizada de forma meramente expositiva, procurando-se criar um primeiro momento de discussão coletiva em torno da representação de gráficos de funções projetados no quadro interativo. O facto, destes gráficos terem sido construídos previamente com o Geogebra e de apenas serem manipulados por mim durante a introdução, não impedia que os exemplos focados na introdução pudessem partir das indicações, dúvidas ou questões suscitadas pelos alunos, bastando, para isso, alterar os parâmetros ou as expressões designatórias das funções.

O Geogebra, que deve o seu nome à fusão dos termos GEOmetria e álGEBRA, pode constituir uma ferramenta extraordinariamente versátil e poderosa no processo de ensino aprendizagem da Matemática. A reduzida complexidade das operações e a oferta de uma vasta gama de funcionalidades fazem do Geogebra uma ferramenta especialmente propensa para a criação de contextos dinâmicos que dão azo à descoberta e exploração das relações existentes entre representações geométricas e representações algébricas e de cálculo (Hohenwarter & Jones, 2007).

Duval (2006) considera que a possibilidade de relacionar as construções geométricas e gráficas com o seu significado algébrico é uma das principais vantagens deste software. Salienta, ainda, que a exploração de conceitos matemáticos, nestas duas vertentes, em vez de jogar a favor da compartimentação dos tópicos matemáticos, propicia uma visão mais globalizante da matemática curricular e, por isso, mais adequada à compreensão dos conceitos em Matemática (Duval, 2006).

A investigação de temas matemáticos, a partir de ambientes de geometria dinâmica, pode contribuir para que a Matemática deixe de ser mal considerada pelos discentes e pode ajudar a fomentar, nos docentes, a crença de que existem modos de utilização do computador, em sala de aula, que podem beneficiar o processo de ensino aprendizagem (Ribeiro, 2005).

No processo introdutório, assim como nas fases de monitorização do trabalho autónomo e de condução da discussão coletiva, evitei fornecer orientações que pudessem revelar estratégias, conjeturas ou procedimentos a seguir na execução da tarefa, uma vez que tal podia anular o potencial de desafio que as tarefas de tipo exploratório devem procurar propor cognitivamente (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008). Neste sentido, quando os alunos passaram a desenvolver autonomamente a exploração, tentei que o meu desempenho no acompanhamento desse trabalho cumprisse as seguintes recomendações do NCTM (2009): resistir ao impulso de indicar estratégias de resolução para as mais variadas tarefas; recorrer ao questionamento quando os alunos pedirem a confirmação das suas respostas, mostrarem possuir dúvidas ou erros recorrentes, promovendo o aprofundamento da situação a ser estudada, com questões do tipo "como sabes que a tua conjetura funciona?", "experimentaste de outra forma?", "o que significa?", "o que queres dizer?", "não podes representar de outro modo?"; dar destaque a explicações com exemplos e ajudar os alunos a refletir sobre a eficiência e quantidade dos exemplos usados ; estabelecer, em sala de aula, um ambiente no qual os alunos se sintam confortáveis para a partilha e crítica de argumentos.

Por vezes, foi necessário incentivar os alunos a ler novamente o enunciado, a voltar atrás na tarefa, a reformular ou recomeçar os raciocínios apresentados. Em circunstâncias de grande impasse, foi necessário reduzir o grau de desafio de algumas questões fornecendo indicações mais precisas ou confirmando a correção ou incorreção das respostas (alguns elementos da turma eram muito carentes de comprovação do trabalho realizado). Quando a mesma dúvida era evidenciada por vários pares de alunos ou a pertinência da dúvida assim o justificasse, pedia que parassem com a resolução da tarefa, para que esta pudesse ser exposta ao grupo turma e ficasse esclarecida em conjunto, antes de retomar o trabalho (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008).

Na fase de acompanhamento do trabalho autónomo, também circulei pela sala com a finalidade de recolher informação pertinente para a fase de discussão e para definir uma sequência de apresentação das resoluções dos alunos que contribuísse para a compreensão dos tópicos focados na discussão (Canavarro, 2011): diversidade das estratégias utilizadas; erros ou propostas incompletas que permitissem criar discussões interessantes; correção, completude e coerência das soluções e dos argumentos apresentados nas justificações e conjeturas criadas; progresso e empenho dos alunos.

Cabe ao professor encarar o erro de forma construtiva, considerando-o como uma forma provisória de saber. Deve tentar compreender a lógica por detrás do erro solicitando que o aluno explique o raciocínio subjacente ou procurando pistas que o conduzam a essa lógica, através da colocação de questões que levem o aluno a refletir sobre o seu próprio raciocínio e procurando envolver a turma nesse processo (Abrahão, 2004).

A finalizar as explorações, foram realizadas discussões com o envolvimento de toda a turma nas quais tentei assumir o papel de principal mediador. Com as discussões em grande grupo, pretendia que os alunos tivessem oportunidades para testar as suas ideias confrontando-as com as dos outros e para treinar a sua capacidade de argumentação, pois tinham de ser suficientemente convincentes para que a turma aceite a sua conjetura como verdadeira (NCTM, 2000). Assim, enquanto principal mediador destas discussões, cabia-me a responsabilidade de estimular a interação aluno-aluno e aluno-professor apoiando, incitando e ampliando atividades como a exposição e questionamento de argumentos, a comparação, a justificação e a explicação (NCTM, 2000).

A condução das discussões coletivas exigiu o questionamento oral centrado em torno de três ações distintas: apoiar, incentivar e ampliar (Cengiz, Kline & Grant, 2011). As ações de apoio aconteciam de forma a ajudar os alunos a relembrar o que já sabiam ou a dar importância à informação introduzida por algum colega ou pelo professor, sugerindo possíveis interpretações que ajudavam a resolver situações de impasse, fazendo eco de algumas das afirmações dos alunos, convidando o outro elemento do par a colaborar quando o primeiro evidenciava dificuldades, ou convidando o resto da turma a fazê-lo, e colocando questões do tipo "e se pensarmos de outra forma?", " será a única forma de chegar a esta mesma conclusão?", "os exemplos de (outro aluno) satisfazem a tua conclusão?". As ações de incitamento aconteciam com a finalidade de encorajar os alunos a tornar público o seu pensamento, através de questões do tipo: "como pensaste?", "queres ajudar o teu colega a melhorar a ideia apresentada?", "como justificas a tua conjetura?". As ações de ampliação surgiam como forma de encorajar os alunos a irem além dos métodos ou processos de resolução utilizados inicialmente, requerendo ao resto da turma a confirmação das resoluções apresentadas, convidando os alunos a avaliar as afirmações feitas e a sustentá-las através de argumentos matemáticos, ou a comparar diversos processos de resolução apresentados e argumentar contra as afirmações dos colegas (Cengiz et al, 2011).

No mesmo sentido, as Aprendizagens Essenciais em articulação com o Perfil dos Alunos (ME, 2018, 2017) sugerem que os alunos sejam incentivados a expor as suas ideias, a comentar as afirmações dos colegas e do professor, a redigir as suas respostas usando linguagem matemática e fundamentar os seus raciocínios apoiando-se em argumentos matemáticos válidos. Todos os participantes das discussões devem ter a possibilidade de ser críticos sobre as questões em discussão, aceitando, ou não, os argumentos apresentados e construindo novos significados a partir das interações estabelecidas com os objetos matemáticos e na relação com os outros (Cengiz et al, 2011). Por conseguinte, os momentos de discussão podiam constituir uma boa oportunidade para a negociação de significados matemáticos entre professor e alunos e, em particular, para a construção de conhecimento sobre o conceito de limite de uma função.

A terminar as discussões, e de forma a clarificar conceitos e procedimentos, foram formuladas sínteses sobre os processos e conceitos, que emergiram do trabalho exploratório e das discussões em grande grupo, onde utilizei linguagem mais formal para que os alunos percebessem que é importante conseguirem interpretá-la e apropriarem-se da mesma.

Tarefas e questão aula

O conhecimento matemático depende, entre outros fatores, da natureza das situações de comunicação e dos padrões de interação que ocorrem na sala de aula, sendo as características das tarefas propostas pelo professor e das atividades realizadas pelos alunos determinantes da dinâmica da aula de Matemática e do desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem (Ponte, 2005). Segundo o NCTM, as tarefas a implementar em sala de aula devem possuir as seguintes características: 1) Apelam à inteligência dos alunos; 2) Desenvolvem a compreensão e aptidão matemática; 3) Estimulam os alunos a estabelecer conexões e a desenvolver um enquadramento coerente para as ideias matemáticas; 4) Apelam à formulação e resolução de problemas e ao raciocínio matemático; 5) Promovem a comunicação sobre Matemática; 6) Mostram a Matemática como uma atividade humana permanente; 7) Têm em atenção diferentes experiências e predisposições dos alunos; 8) Promovem o desenvolvimento da predisposição de todos os alunos para fazer Matemática (NCTM, 1994).

A APM (1988) advoga que a atividade dos alunos, na aula de Matemática, é determinada, em grande medida, pelo tipo de tarefas selecionadas:

> A aprendizagem da Matemática é sempre produto da atividade, e se esta se reduz, por exemplo, à resolução repetitiva de exercícios para aplicação de certas fórmulas, é exatamente isto que se aprende e vai perdurar, enquanto ficar a memória das fórmulas. (p. 13)

Cada tarefa desempenha um papel específico na aprendizagem dos alunos, recaindo sobre o professor a responsabilidade de selecionar tarefas apropriadas para estimular a intuição e a experimentação, para consolidar os conteúdos estudados ou para desenvolver técnicas rotineiras de resolução (Ponte, 2005).

Para Ponte (2005), uma tipologia de tarefas pode ser estabelecida a partir de duas dimensões constitutivas: o grau de desafio matemático e o nível de estrutura das tarefas. O grau de desafio matemático depende do nível de dificuldade levantada pela questão a trabalhar, variando entre reduzido e elevado. O nível de dificuldade de uma tarefa é tão mais elevado quanto menos as suas características exigirem a reprodução de técnicas rotineiras de resolução e a compartimentação de conhecimentos e, alternativamente, mais fomentarem a fundamentação e justificação dos processos e conteúdos mobilizados e apelarem ao sentido crítico. Por sua vez, o nível de estrutura está relacionado com o grau de determinação que é conferido tanto ao que é dado como pelo que é pedido na questão a trabalhar, variando entre aberto e fechado. Numa tarefa fechada, é claramente dito o que é dado e o que é pedido enquanto que uma tarefa aberta comporta sempre alguma indeterminação em pelo menos um destes aspetos. Com a implementação de tarefas de tipo aberto, em pequeno ou grande grupo, os alunos são desafiados a clarificar as suas ideias e raciocínios, oralmente ou por escrito, desenvolvendo a capacidade de comunicar e de argumentar matematicamente (Ponte et al, 1997).

A tipologia de tarefas pode ser obtida associando as duas dimensões de todas as maneiras possíveis, comportando assim quatro tipos de tarefas: 1) exercícios: tarefa fechada de desafio reduzido; 2) problemas: tarefa fechada de desafio elevado; 3) explorações: tarefa aberta acessível à maioria dos alunos; 4) investigações: tarefa aberta de desafio elevado (Ponte, 2005). Embora esta tipologia aponte para quatro categorias distintas, é preciso realçar que a linha de demarcação entre os diferentes tipos de tarefa nem sempre é fácil de traçar, dependendo esta demarcação de fatores como os conhecimentos prévios dos alunos ou o contexto em que as tarefas são implementadas (Ponte, 2005).

As tarefas de exploração e de investigação também costumam integrar momentos de discussão coletiva nos quais é fundamental a criação de um entendimento entre todos os elementos da turma, sendo o processo de ensino-aprendizagem incorporado num processo social de explicar, esclarecer e ilustrar raciocínios resolutivos e processuais, exemplos e contraexemplos, raciocínios conjeturais e generalizantes, argumentos favoráveis e de refutação (Krummheuer, 1998). Sem esquecer a compreensão do pensamento e dos raciocínios dos alunos, as discussões em grande grupo contribuem para o reconhecimento, e autorreconhecimento, do que tem de ser melhorado no seu discurso — organização e articulação das ideias, clareza e coerência da argumentação, proficiência semântica, mestria na utilização do vocabulário e da simbologia matemática, — de forma a outorgar efetividade ao debate de ideias (Ponte, 2005).

Assim, para além dos motivos indicados na precedente secção de texto, a implementação de tarefas de exploração pretendia desafiar os alunos a explorar processos, recolher dados e mobilizar conhecimentos de maneira a formular, justificar e confirmar conjeturas, que podiam levar os alunos a construir uma compreensão do conceito de limite favorável à aprendizagem dos processos e conceitos que integravam a unidade didática. Por outro lado, como as interações resultantes das tarefas de exploração possibilitam o surgimento de múltiplas perspetivas que, normalmente, merecem ser confrontadas ou relacionadas, a adoção destas tarefas também se deveu à sua vocação para estimular a fundamentação de raciocínios, a explicação e justificação de resultados e procedimentos, a necessidade de compreender os argumentos apresentados, antes de os aceitar ou rejeitar (Arends, 1995).

Em sequência, apresento detalhadamente as tarefas utilizadas durante a lecionação da unidade didática, cujos enunciados podem ser encontrados no Anexo II.

Tarefa I

Limites no infinito de funções reais de variável real

A tarefa "*Limites no infinito de funções reais de variável real*" foi concebida com o propósito de criar um primeiro momento de exploração, em torno do conceito de limite, que pudesse contribuir para a construção de uma noção intuitiva deste conceito.

O objetivo era apresentar uma noção de limite que salientasse sobretudo a sua dimensão procetual, propondo aos alunos que a aproximação à compreensão do conceito fosse efetuada mediante a dinamização de um processo de dupla aproximação, que teria de ser discernido com a observação e interpretação da representação gráfica de várias funções. Pretendia que os alunos criassem uma compreensão intuitiva do processo de determinação da existência de limite e identificação do respetivo valor a partir do deslocamento de um ponto ao longo do gráfico de uma função. Isto é, a determinação do limite de uma função pode decorrer da identificação do valor y para o qual as imagens da função se aproximam ou tendem, quando os objetos correspondentes se aproximam de um certo valor x ou quando os valores de x aumentam ou diminuem infinitamente. Se verificarmos que, deste processo, resulta mais de um valor de y, isso significa que não existe limite.

A tarefa era composta por quatro questões e cada uma delas incluía três alíneas. Todas as questões requeriam do aluno uma justificação que revelasse em que se fundamentaram os alunos aquando da formulação das suas respostas, exceto a questão 2 Com esta opção, pretendia desafiar os elementos da turma a fundamentarem e tornarem mais claros os raciocínios em que basearam as suas respostas, sem esquecer a necessidade de convencer os outros sobre a validade e razoabilidade dos mesmos. Por outro lado, também serviu como instrumento para aferir sobre a sua capacidade de construir justificações e que tipo de argumentos (verbais ou não) utilizavam para tal.

A questão 1 requeria que os alunos, em cada uma das alíneas, indicassem o valor lógico de duas afirmações matemáticas onde eram indicadas duas possibilidades sobre os limites no infinito de três funções reais de variável real. Uma das funções correspondia a uma função afim e as outras duas eram funções racionais, portanto a mobilização de conhecimentos prévios podia ser suficiente para a resolução da alínea correspondente à função afim, mas, no que diz respeito às funções racionais, isso podia não bastar.

Deste modo, pretendia-se estimular, nos alunos, a necessidade de recorrer à máquina de calcular para obter as representações gráficas das funções evocadas no enunciado da tarefa e que, através da aplicação do processo de dupla aproximação já explicitado anteriormente, tirassem conclusões sobre a existência e a identificação do limite das funções no infinito, isto é, quando os valores de x tendem para infinito.

Na questão 2, pretendia que os alunos representassem o esboço de gráficos de funções que satisfizessem as condições sobre limites indicadas no enunciado. Era minha intenção que eles explorassem as representações gráficas, ou desenhando diretamente esboços de funções que cumprissem com o que era pedido, ou que explorassem as representações gráficas de expressões algébricas criadas por eles utilizando a calculadora gráfica.

No segundo caso, o processo era favorecido se os alunos tomassem em consideração a questão anterior, pois era possível obter gráficos que cumprissem as condições da questão 2 a partir da representação gráfica das expressões algébricas das funções fornecidas na questão 1 ou da realização de ligeiras alterações nessas expressões. A mobilização de conhecimentos sobre o gráfico de funções afins e de funções polinomiais de grau dois[7] também podia ajudar na obtenção de um esboço que satisfizesse os limites das alíneas a) e b), respetivamente.

Na questão 2.1, era suposto que os alunos estabelecessem conjeturas que permitissem relacionar os limites com os gráficos de funções cúbicas, quadráticas e racionais. A confirmação das teses conjeturais devia ser concretizada por intermédio das representações de gráficos obtidos com a máquina de calcular.

Esta questão foi pensada para ser explorada na fase de discussão em grande grupo, mediante o questionamento oral dos alunos sobre a possibilidade de prever os limites no infinito das funções polinomiais e racionais sem ser necessário representar o gráfico das funções. Isto é, a manipulação algébrica das expressões analíticas e o conhecimento das características dos gráficos das funções referidas, tais como a simetria das parábolas, a monotonia das retas, o conhecimento das assimptotas horizontais, etc., também podem contribuir para a identificação do limite das funções.

A questão 3 prestava-se a considerar algumas situações, mais ou menos problemáticas, que ainda não tinham sido suscitadas. Na primeira alínea, uma má seleção dos valores a atribuir na janela gráfica podia impedir a obtenção de uma representação gráfica. Contudo, este procedimento podia não ser necessário se os alunos percebessem que a expressão algébrica correspondia à de uma função polinomial de grau dois, em que o termo de grau dois possui coeficiente negativo. Com a segunda alínea pretendia-se que os alunos chegassem à conclusão de que nem sempre é possível identificar o limite de

[7] Alternativamente, e de forma mais geral, podia ter mencionado o conhecimento das características dos gráficos de funções polinomiais de grau ímpar e dos gráficos de funções polinomiais de grau par.

uma função, considerando-se nestes casos que o limite não existe. Na última alínea, o comportamento sinusoidal típico das funções trigonométricas podia causar problemas na interpretação gráfica do limite da função aí considerada. Por outro lado, a inclusão desta alínea na tarefa também servia para consolidar o conceito de assíntota horizontal e a sua ligação com a determinação do limite de uma função no infinito.

Nesta tarefa, não introduzi nenhuma sugestão esquemática para a apresentação das justificações porque não quis exercer nenhum tipo de influência sobre as opções dos alunos. Pretendia, assim, tirar ilações sobre os argumentos utilizados pelos alunos nas justificações: argumento escrito do tipo "é verdade/falso porque"; apresentação da representação gráfica da função; explicação do processo de dupla aproximação com um esquema.

Tarefa 2

Vamos investigar a definição de limite segundo Heine

A tarefa 2 resultou da adaptação da atividade 15, incluída num manual escolar de 2005, XEQ MAT Matemática 12.º ano volume 2. O enunciado da tarefa aparecia encabeçado por uma transcrição da definição de limite segundo Heine, que havia sido retirada do manual de Matemática A[8] vigente na Escola secundária de Camões.

Esta tarefa foi concebida com os seguintes objetivos, em prol das aprendizagens dos alunos: utilizar representações tabelares na formulação de conjeturas sobre limites de sucessões e funções e propiciar aos alunos a possibilidade de explorar a definição de limite segundo Heine, aplicando-a na construção de argumentos conjeturais e justificativos ou na constituição de provas que consigam sustentar certas conclusões.

No que concerne ao objetivo do estudo desenvolvido ao longo da intervenção letiva, esta tarefa pretendia colocar os alunos a construir conjeturas e a defender conclusões utilizando argumentos, que podiam apresentar a seguinte estrutura: **Dado que** (explicar factos), **então** concordo/não concordo que… (conclusão), **porque** (justificar em que baseio o raciocínio).

A tarefa era composta por três grupos de questões. O primeiro grupo de questões só continha a questão 1.1 que exigia que se completasse uma tabela e indicasse o limite de duas sucessões cujo termo geral era dado no enunciado. Nesta questão, os alunos podiam mobilizar os conhecimentos sobre limites de sucessões para identificar o limite de cada uma delas ou conjeturar esse valor a partir da apreciação da tendência evidenciada pelos

[8] Novo Espaço Matemática A 11.º ano, Parte 2. Porto Editora, 2017.

valores das tabelas. Na fase de discussão, esta questão (assim como as questões 2.1.1 e 3.1.1) podia suscitar um debate sobre a possibilidade de identificar, com plena convicção ou apenas de forma conjetural, o limite de uma sucessão (ou função) a partir da tendência revelada pelos valores da tabela. O questionamento oral dos alunos sobre este tema podia ser muito útil para os alertar que a construção de uma conjetura deve ser sempre acompanhada de um momento de confirmação ou teste acerca da sua validade lógica.

O segundo grupo de questões era constituído por três questões: na pergunta 2.1, surgiam tabelas para preencher com os valores dos termos das sucessões (u_n) e (v_n), cujos termos gerais eram os mesmos da questão anterior, e das sucessões $(f_{(u_n)})$ e $(f_{(v_n)})$, cujos termos gerais podiam ser obtidos por composição a partir da expressão analítica de $f(x)$, conhecida através do enunciado da tarefa. A questão 2.1.1 pedia para os alunos formularem conjeturas sobre os limites das duas últimas sucessões, apresentando os argumentos em que se baseavam. Na questão 2.1.2 era requerido aos alunos que formulassem um argumento onde tinham de fundamentar a sua concordância, ou não, em relação a uma afirmação sobre o valor do limite da função $f(x)$ num dado ponto, a partir da satisfação dos requisitos estabelecidos na definição de limite segundo Heine.

Assim, esta questão induzia, nos alunos, a necessidade de desconstruir a definição de limite segundo Heine, no intuito de determinar os seus elementos essenciais (requisitos). Ou seja, a determinação de $\lim_{x \to a} f(x) = b$ exige que: 1) a tem de ser um ponto aderente ao D_f ; 2) $\lim f(u_n) = \lim f(v_n) = \lim f(w_n) = b$ (averiguar se $u_n \to a^-$; $v_n \to a^+$ e $w_n = a$ podem ser definidas no D_f e verificar se as suas imagens pela função f formam sucessões que convergem para o mesmo valor b, isto é $f_{(u_n)} \to b$; $f_{(v_n)} \to b$; $f_{(w_n)} \to b$).

A acompanhar esta questão, acrescentei uma sugestão — enunciada no início da descrição da Tarefa 2 — que apresentava uma estrutura com potencialidades para organizar o discurso argumentativo na defesa de uma tese.

O terceiro grupo de questões 3 foi dividido em três questões semelhantes às do segundo grupo. Tanto a descrição do que é requerido em cada questão como a descrição dos objetivos e pressupostos por detrás da sua conceção são idênticas às da questão 2. As únicas diferenças dizem respeito à expressão da função real de variável real utilizada (daí referir-se à função $g(x)$ em vez de $f(x)$) e ao enunciado da afirmação a comentar em 3.1.2.

Tarefa 3

Limite num ponto aderente ao domínio de uma função real de variável real.

A tarefa 3 foi concebida com o objetivo de introduzir o conceito de limite lateral a partir de uma tarefa de exploração na qual foram utilizadas representações gráficas e representações tabelares ou numéricas.

A tarefa continha cinco questões e cada uma continha um número variável de alíneas. As questões 1.1 e 1.1.1 eram questões de consolidação porque, apesar do conceito de limite lateral, à esquerda ou à direita, não ter sido introduzido antes desta tarefa, as definições de ponto aderente e de limite segundo Heine exigiram que a simbologia relacionada com os limites laterais já tivesse sido utilizada e trabalhada. Assim, a identificação dos limites, exigida nas alíneas da questão 1.1, podia ser obtida a partir da leitura do gráfico apresentado no enunciado, enquanto que a não existência de limite tinha de ser explicada a partir da aplicação da definição de limite segundo Heine na construção de um argumento cuja estrutura podia ser baseada numa sugestão similar à da tarefa anterior. Já as alíneas da questão 1.1.1 pretendiam que os elementos da turma construíssem comentários que justificassem a sua concordância, ou discordância, com as afirmações matemáticas apresentadas. Para isso, deviam usar os valores dos limites indicados na questão anterior e a definição de limite num ponto segundo Heine.

Contudo, estas questões também tinham um fundo exploratório porque era pretendido que a sua resolução contribuísse para as conclusões sobre limites laterais que iam ser debatidas e sistematizadas durante a discussão coletiva.

A questão 1.2 inicia uma pequena exploração sobre a existência de limite num ponto pertencente ao domínio (e, por isso, aderente ao domínio) da função cujo gráfico aparecia representado no enunciado da tarefa e apresenta uma descontinuidade nesse ponto. A expressão algébrica desta função, assim como o termo geral de três sucessões, é fornecida na questão 1.2 para permitir o preenchimento das tabelas introduzidas nesta questão, de forma similar à exploração da tarefa 2. A semelhança com a tarefa 2 foi intencional, porque podia contribuir para os alunos chegarem às conclusões requeridas na questão 1.2.1 que, por sua vez, também iam contribuir para a fase de sistematização de conteúdos, no final da discussão coletiva.

A exploração acabava na questão 1.3, onde era pretendido que os alunos, face aos dois argumentos aí enunciados, conseguissem extrapolar as conclusões assumidas na questão 1.2.1 de maneira a avaliar como verdadeiros ou falsos cada um desses argumentos.

No caso de considerarem algum dos argumentos como falso, deviam apresentar quais os erros detetados na construção desse argumento ou, em alternativa, apresentar um exemplo que contrariasse as alegações do argumento avaliado como falso.

No fim da discussão coletiva, que normalmente acontecia a terminar o trabalho de exploração em torno das tarefas descritas, era esperado que os alunos colaborassem na constituição da seguinte síntese de conhecimentos:

- Existe limite lateral da função *f* para valores superiores [inferiores] ou à direita [esquerda] de a, se a for aderente ao D_f e para todas as sucessões definidas por valores de D_f em que $u_n \to a^+$ [$u_n \to a^-$], $\lim f(u_n) = f(a^+) = b$ [$\lim f(u_n) = f(a^-) = b$]. Este limite pode ser representado por $\lim_{x \to a^+} f(x) = b$ [$\lim_{x \to a^-} f(x)$]
- Sendo *a* aderente ao domínio de *f* , apesar de *a* não pertencer ao domínio de *f*, existe $\lim_{x \to a} f(x)$ se e só se $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$ e o valor de $\lim_{x \to a} f(x)$ é igual ao valor de $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$.
- Quando *a* pertence ao domínio da função *f*, logo *a* é aderente ao domínio de *f*, existe $\lim_{x \to a} f(x)$ se e só se $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ e o valor de $\lim_{x \to a} f(x)$ é igual ao valor de $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.
- Num ponto isolado do domínio de f, com abcissa $x = a$ (ou $u_n = a$), existe limite e $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Atenção: Apenas estudar os limites laterais para a^+ou para a^- quando fizerem sentido no domínio da função.

Questão aula

A questão aula foi concebida não só para avaliar o progresso das aprendizagens dos alunos contemplando todos os conteúdos matemáticos lecionados durante a intervenção, já descritos nas Tarefas 1, 2 e 3, mas também para permitir a recolha de informação sobre a sua proficiência na formulação de argumentos, com a finalidade de constituir provas e justificações. Com este instrumento de avaliação, os alunos eram convidados a mostrar o seu conhecimento matemático ao se depararem com questões que requeriam a justificação das suas respostas.

A questão aula era composta por dois grupos de questões e, ambos os grupos, foram elaborados em torno de representações gráficas de funções. A questão que compunha o primeiro grupo era de escolha múltipla e exigia que os alunos indicassem pelo menos uma razão, que servia como justificação, para a rejeição de cada opção considerada como incorreta. No seu enunciado, era apresentado um conjunto de dados referentes aos limites de uma função, ora quando os valores de x tendiam para infinito ora quando tendiam para valores concretos, e quatro opções de resposta, cada uma delas contendo o gráfico de uma função. Assim, os alunos tinham de determinar a opção cujo gráfico representava na perfeição o conjunto de dados fornecido no enunciado e indicar pelo menos uma discrepância entre o conjunto de dados e o gráfico de cada opção incorreta.

O domínio da função descrita pelo conjunto de dados e das funções representadas pelos gráficos, em cada uma das opções, era idêntico.

O segundo grupo era composto por três questões e o seu cabeçalho continha a representação gráfica de uma função $f(x)$, que devia ser utilizada em todas as questões deste grupo. A primeira questão requeria que a identificação de um limite, num determinado ponto do domínio da função representada, fosse precedida de uma justificação que defendesse a existência de limite nesse ponto. A segunda questão acrescentava ao enunciado os termos gerais de duas sucessões u_n e v_n. Esta questão surgia dividida em quatro alíneas e, em cada uma delas, era pedido que os alunos indicassem o limite das sucessões $u_n, v_n, f(u_n), f(v_n)$. A terceira questão constava de uma afirmação matemática e requeria que os alunos provassem a sua veracidade.

Tarefa 4

Operações com limites

A tarefa 4 foi elaborada em colaboração com a orientadora cooperante, já depois da minha intervenção letiva ter terminado, de forma a conter momentos de justificação e de prova matemática. Pretendia-se, deste modo, perceber se, perante a solicitação de justificações e da realização de provas matemáticas, os alunos sentiam a necessidade de empregar uma estrutura argumentativa semelhante, ou idêntica, à que tinha sido sugerida nas tarefas de exploração e utilizada durante as discussões coletivas, na correção das resoluções dos alunos. Por esta razão, na descrição da tarefa 4 apenas vou dar destaque às questões relacionadas com a argumentação dos alunos, indicando ainda os tópicos matemáticos visados.

As operações com limites foram lecionadas de forma a introduzir, em simultâneo, as indeterminações $\frac{0}{0}$, $+\infty - \infty$, $0 \times \infty$ (a indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$ já tinha sido trabalhada com as sucessões) e baseavam-se no seguinte quadro-resumo:

Quadro-resumo
Sejam f e g funções reais de variável real e b_1 , b_2 números reais, tais que: $\lim_{x \to a} f(x) = b_1$ e $\lim_{x \to a} g(x) = b_2$ Para cada um dos casos seguintes, a é ponto aderente ao respetivo domínio, ou igual a $\pm\infty$.
$\lim_{x \to a} (f \pm g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = b_1 \pm b_2$
$\lim_{x \to a} (f \times g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x) = b_1 \times b_2$
$\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{b_1}{b_2}$, com $b_2 \neq 0$
$\lim_{x \to a} (k \times f)(x) = k \times \lim_{x \to a} f(x) = k \times b_1$
$\lim_{x \to a} (f^r)(x) = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)^r = b_1{}^r$, com $b_1 \neq 0$ se $r < 0$

Figura 8: Operações com limites usadas na tarefa 4 (Adaptado de Costa & Rodrigues, 2017).

Na questão 1.2 era pretendido que os alunos avaliassem se uma afirmação matemática era verdadeira ou falsa e justificassem a atribuição do valor lógico que considerassem ser mais correto. A afirmação matemática correspondia à declaração de não existência de limite num ponto da divisão entre duas funções reais de variável real cujos gráficos apareciam representados no enunciado da questão 1.

A questão 3 era constituída por quatro alíneas e, em cada uma delas, continha uma afirmação que devia ser avaliada como falsa ou verdadeira. Nas afirmações consideradas como falsas, os alunos tinham de apresentar um contraexemplo provando assim a sua falsidade. As afirmações que compunham a questão 3 referiam-se às operações de divisão e de subtração entre funções, mas não eram dadas nem as suas expressões algébricas nem os seus gráficos. Esta questão exigia, portanto, a exploração de exemplos requerendo a utilização da máquina de calcular, para além da mobilização de conhecimentos sobre limites e funções polinomiais, de maneira a tornar a exploração de exemplos seletiva, sistemática e exaustiva.

Avaliação das aprendizagens

Quando avaliamos, fazemos quer uma medição (entendida, em sentido amplo, como recolha de informação), quer uma valoração (comparação entre os dados obtidos na medição e parâmetros de referência determinados previamente ou contextualmente), que se deve refletir no processo de aprendizagem. Avaliar as aprendizagens dos alunos corresponde tanto a analisar dados e informações, que possibilitem ao professor inferir sobre os conhecimentos dos alunos e as melhorias a introduzir no processo de ensino e aprendizagem, como a fornecer informações aos alunos para que estes possam refletir sobre a aprendizagem, atribuindo-lhes responsabilidade sobre esta (Pinto & Santos, 2006; NCTM, 2007).

A avaliação pode ser encarada como um processo de interação social complexa, inscrito numa dinâmica relacional com múltiplos significados, no qual deve ser privilegiado o eixo aluno-saber ao mesmo tempo que o professor tem de assumir o papel de mediador entre os dois polos deste eixo (Pinto & Santos, 2006).

De acordo com o Programa e Metas Curriculares de Matemática A do Ensino Secundário (MEC, 2014), a finalidade da avaliação não deve ser reduzida à constituição de uma grelha de resultados com base num sistema de classificação sumativa das aprendizagens dos alunos.

> Os resultados dos processos avaliativos (de caráter nacional, de escola, de turma e de aluno) devem contribuir para a orientação cientifico-pedagógica do ensino, para que se possam superar, em tempo útil e de modo apropriado, dificuldades de aprendizagem identificadas e, simultaneamente, reforçar os progressos verificados. Todos estes propósitos devem ser concretizados recorrendo a uma avaliação diversificada e frequente, contribuindo para que os alunos adquiram uma maior consciência do seu nível de conhecimentos e valorizem a avaliação como um processo promotor de melhores desempenhos. (p.30).

Segundo Pinto e Santos (2006) podem ser consideradas, no sistema educativo português, três modalidades de avaliação: diagnóstica, formativa ou sumativa. Ao longo da intervenção letiva, o processo de avaliação foi desenvolvido segundo uma abordagem predominantemente formativa, com função reguladora, embora também tenha ocorrido um momento de avaliação sumativa. Para Santos (2008), a avaliação formativa possui um caráter contínuo e sistemático e admite uma grande variedade de instrumentos de recolha de informação. Permite ao professor, ao aluno e ao encarregado de educação obterem informação sobre o desenvolvimento da aprendizagem, com vista ao ajustamento de processos e estratégias. A avaliação reguladora pode ser entendida como um processo de acompanhamento do ensino e aprendizagem dos alunos, com o objetivo principal de interpretar e compreender o modo como os alunos pensam de forma a promover ambientes de aprendizagem cada vez mais propícios à sua autonomia. A avaliação sumativa corresponde à formulação de um juízo global sobre a aprendizagem dos alunos e tem como objetivos a classificação e certificação (Santos, 2008).

Enquanto decorreu a lecionação da unidade didática, tive de recolher informações que me permitissem inferir sobre a seleção de tarefas e estratégias mais adequada à promoção do envolvimento dos alunos, sem esquecer que todas as atividades de aprendizagem podiam ser consideradas por um processo de avaliação (Arends, 1995). Estas informações resultavam da observação e das interações com os alunos de maneira a potenciar as aprendizagens com significado e o papel regulador que os alunos podiam desempenhar em prol daquelas.

Contudo, tenho de admitir que, algumas vezes, a minha ação na regulação do processo de aprendizagem acabou por assumir maior preponderância do que era desejável. Ainda assim, para além de ter tentado aproximar o trabalho pedagógico de um processo quotidiano de avaliação formativa, encarei sempre o erro como um instrumento ao serviço do processo de ensino e aprendizagem, organizando contextos que permitiam o seu reconhecimento e compreensão pelos alunos sem haver necessidade de retificação prévia da minha parte (Pinto & Santos, 2006).

Como instrumentos de avaliação reguladora utilizei o questionamento oral, a observação do trabalho autónomo dos alunos e a recolha e análise das tarefas realizadas. O questionamento oral é a forma de interação verbal mais comum em sala de aula, assumindo um papel fundamental na avaliação reguladora e na promoção do envolvimento dos alunos (NCTM, 2000). Ao mesmo tempo que o questionamento oral serviu para tentar integrar todos os alunos na dinâmica da sala de aula e incentivar uma atitude mais proativa durante as introduções das tarefas e as discussões em grande grupo, também se prestava à deteção das dificuldades e ideias erróneas dos alunos e à aferição de como decorriam as atividades de aprendizagem (participação, colaboração entre pares, interesse, desempenho, autonomia, cooperação) e do meu papel de dinamizador e orientador das mesmas (Santos, 2008). Nas discussões coletivas, também procurei utilizar este instrumento de avaliação de maneira a desenvolver a ação reguladora da auto e coavaliação dos alunos, conferindo à turma legitimidade para validar e corrigir raciocínios e processos (Santos, 2008).

A observação do trabalho autónomo dos alunos permitiu-me a obtenção de notas de campo sobre alguns aspetos, verbais ou não, que concorreram no sentido de complementar as informações obtidas com o questionário oral e para me auxiliar a reconhecer, nos elementos da turma, das suas qualidades e defeitos, em termos de atitudes individuais e do comportamento individual e global, da disposição de interagir com o professor e com os colegas, dos valores e crenças culturais, morais e sociais. (Arends, 1995). A utilização deste instrumento ajudou-me a tomar decisões na gestão das aulas, que muitas vezes resultaram na alteração das opções didáticas previstas na fase de planificação das aulas: alargamento do tempo de realização das tarefas ou dos momentos de discussão; alterar o número de elementos dos grupos de trabalho autónomo; utilização de marcador e quadro em vez do quadro interativo; alargar os temas e o tempo de debate em torno de certos conteúdos matemáticos (Arends, 1995).

As tarefas realizadas foram constituídas como instrumentos de avaliação fornecendo-me dados sobre as opções finais de resolução, tomadas em cada grupo durante o momento de trabalho autónomo, que me permitiram obter informações sobre a evolução das aprendizagens em termos procedimentais e concetuais e em que medida estas aprendizagens se tornavam significativas e conseguiam ser mobilizadas pelos alunos como conhecimento adquirido. No final da intervenção letiva, foi realizada uma Questão aula com o objetivo de propiciar uma síntese das aprendizagens e de fornecer dados sobre o progresso nas aprendizagens e o desempenho a nível argumentativo. O tempo de duração previsto para este momento de avaliação era de 1 hora, no entanto foi necessário usar parte do intervalo de maneira a permitir que todos os alunos a terminassem. Para além da utilização da máquina de calcular, a consulta do manual escolar e do caderno foi permitida durante a resolução da Questão aula porque pretendia que, na construção das suas respostas, os alunos recorressem às definições e aos tópicos sistematizados no final das discussões coletivas. Queria compreender, desta forma, em que medida tais conteúdos eram reconhecidos e mobilizados pelos elementos da turma e qual a sua função nos argumentos apresentados nas respostas.

Mediante a atribuição de classificações, que foram constituídas como mais um elemento para a avaliação sumativa, os alunos puderam tirar ilações sobre a qualidade matemática do seu desempenho. A Questão aula também serviu para fornecer informações aos alunos acerca do caminho a seguir para melhorarem as suas produções escritas, já que a devolução das resoluções integrava indicações sobre o desempenho argumentativo e sobre as aprendizagens evidenciadas.

O diagrama circular, na Figura 9, refere-se às classificações e cotações obtidas na Questão aula e cada setor representa o número de alunos cuja cotação pertence a um dos intervalos da legenda. Note-se que quatro alunos faltaram a esta aula e apenas dois alunos tiveram classificação abaixo de 10 valores. A média deste exercício de avaliação foi de 14,64, tendo as notas variado entre 5,5 e 18,5.

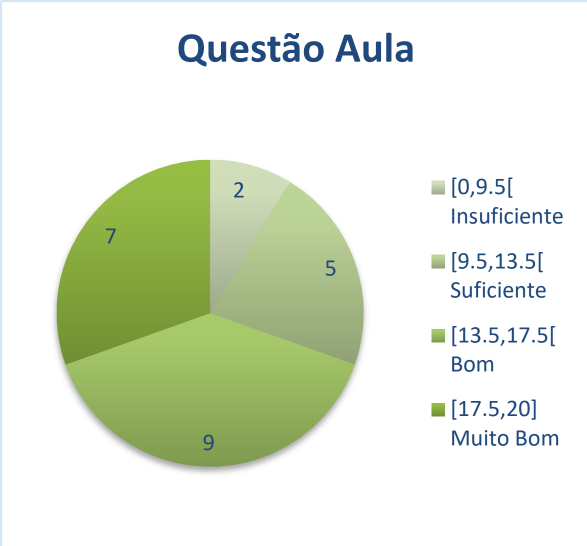


Figura 9: Classificações da Questão aula.

Descrição das aulas lecionadas

A experiência de ensino, levada a cabo sob supervisão, ocorreu após a realização do segundo teste de avaliação sumativa e foi concretizada durante as duas últimas semanas de aulas do 2.º Período letivo. A última aula da intervenção aconteceu três dias antes de começar o período de férias da Páscoa e os alunos já evidenciavam uma certa desconcentração e descompressão, típicas do momento. Mesmo assim, a maior parte dos elementos da turma aceitou os desafios propostos e deixou envolver-se nos contextos promovidos durante a intervenção letiva, participando e contribuindo de forma ativa embora assumissem, simultaneamente, uma atitude demasiado descontraída e pouco empenhada em aprofundar os conhecimentos. Isto acabou por criar algumas dificuldades na gestão da aula, principalmente no que diz respeito à gestão do tempo de duração quer dos momentos de discussão em grande grupo quer dos momentos de trabalho autónomo.

1ª Aula: 25/03/2019

Durante a planificação da primeira aula da intervenção letiva, foram estipulados os seguintes objetivos de aprendizagem: mobilizar conhecimentos prévios de limites de sucessões; mobilizar conhecimentos prévios de funções reais de variável real; representar e interpretar gráficos de funções, com a recurso à calculadora; desenvolver uma noção intuitiva do conceito de limite a partir da interpretação do gráfico de funções reais de variável natural (sucessões) e de variável real; determinar limites no infinito a partir da representação do gráfico de funções; explicar, conjeturar e justificar resultados.

A dinâmica da aula foi centrada no trabalho realizado pelos alunos em torno de uma tarefa de exploração (Tarefa 1) e, por isso mesmo, a aula foi planificada de modo a contemplar três momentos principais com características distintas: primeiro momento de discussão coletiva que correspondia à introdução e apresentação da tarefa; momento de trabalho autónomo na resolução da tarefa; segundo momento de discussão coletiva em torno das resoluções dos alunos e da sistematização de conteúdos abordados.

No primeiro momento de discussão em grande grupo, a introdução da tarefa foi efetuada a partir da apresentação dos gráficos de funções, no quadro interativo ou mediante a representação manual no quadro branco, de modo a encorajar os alunos a identificar o limite de funções através do processo gráfico de dupla aproximação, já descrito anteriormente. Comecei por estimular os alunos a estabelecer conexões com alguns conhecimentos relacionados com o limite de sucessões, lecionado anteriormente pela professora cooperante, levando os alunos a identificar o limite de sucessões a partir da interpretação gráfica. Depois, a partir da leitura do gráfico de funções reais de variável real, cujas expressões algébricas correspondiam aos termos gerais das sucessões utilizadas, mas definidas em $\mathbb{R}$ em vez de $\mathbb{N}$, pedia para os alunos identificar o limite quando os valores de x tendiam para $+\infty$ (que concluíam ser idêntico ao das sucessões) e, depois, para $-\infty$, que levava os alunos a criar uma noção intuitiva sobre o limite de funções no infinito. Como não pretendia reduzir o grau de desafio da tarefa, apenas utilizei os gráficos de uma função afim, de uma função quadrática e de uma função racional, depois de ter iniciado com os gráficos das sucessões correspondentes.

Os alunos revelaram-se bastante participativos e a introdução acabou por durar mais do que havia sido previsto temporalmente.

Mas, tal atraso ainda veio a aumentar durante o momento de trabalho autónomo, se considerar como referência o tempo de duração previsto na planificação da aula. Apesar de ter desenvolvido uma ação de monitorização do trabalho autónomo dos alunos que, por vezes, teve de reduzir o nível de desafio da tarefa, a construção e manipulação exploratória de gráficos de funções, efetuada por cada par de alunos com a máquina de calcular, tornou-se muito morosa e impediu que a resolução da Tarefa 1 fosse concretizada na sua plenitude. A maior parte dos alunos atingiu a penúltima questão da tarefa, deixando-a incompleta, mas nenhum conseguiu abordar a última questão.

Por conseguinte, a conclusão da tarefa e o segundo momento de discussão tiveram de ser relegados para a aula seguinte.

2ª Aula: 27/03/2019

A segunda aula de 90 minutos começou com uma discussão coletiva que contemplava a apresentação de algumas das resoluções da Tarefa 1 por parte dos alunos. Alguns pares de alunos eram convidados a escrever as suas resoluções no quadro, tendo a sua seleção obedecido a critérios de pertinência, que foram estabelecidos a partir dos objetivos de aprendizagem previstos no plano da aula anterior, e a critérios de coerência e concisão na argumentação (no fim da primeira aula, os alunos tinham entregado as suas resoluções possibilitando uma triagem que cumprisse estes critérios). Os alunos, que apresentavam as resoluções no quadro, eram questionados de forma a explicar as suas resoluções e a justificar os raciocínios procedimentais e conjeturais por detrás de tais resoluções.

Depois de acabar este momento de apresentação de resoluções, entreguei o enunciado da Tarefa 1 aos alunos, com a intenção de resolvermos, em conjunto, as duas questões que ficaram por fazer na primeira aula. No entanto, a resolução em grande grupo, do resto da Tarefa 1, prolongou-se por mais tempo do que o desejado. Faltando pouco mais de 30 minutos para o final da aula, o tempo restante foi destinado à introdução do conceito de ponto aderente seguida de uma primeira abordagem à definição de limite segundo Heine. Isto significa que a planificação da aula teve de ser alterada porque, face ao tempo que restava e ao propósito de introduzir os tópicos já mencionados, não seria produtivo iniciar a tarefa de exploração prevista para esta aula.

A definição de ponto aderente foi proposta depois da interpretação dos gráficos de duas sucessões ter sido realizada no quadro interativo, aproveitando as funcionalidades do Geogebra. Os alunos puderam observar o deslocamento de um ponto ao longo do eixo das abcissas, que representava a variação de valores dos termos de duas sucessões que tendiam para um valor real, por valores inferiores e superiores, conseguindo desta forma observar a aproximação, pela esquerda e pela direita, a um valor real pertencente ao eixo Ox. De seguida, acrescentando a esta simulação dinâmica o gráfico de duas funções reais de variável real (não simultaneamente), foi possível identificar o conjunto de pontos candidatos à existência de limite nestas funções e passar a denominá-los por conjunto de pontos aderentes aos respetivos domínios.

Finalmente, ainda foram estabelecidas correspondências entre a aproximação dos valores de x e a variação dos valores das imagens de cada uma das funções, que podiam ser visualizadas pelo deslocamento de um ponto ao longo do gráfico da função, permitindo apresentar, pela primeira vez, a definição de limite de uma função segundo Heine.

Embora considere uma boa decisão não ter iniciado a tarefa de exploração, penso que não foi positivo ter mantido a mesma abordagem metodológica até ao fim da aula. Isto é, ter continuado com o processo de discussão em grande grupo acabou por criar confusão na aproximação aos novos tópicos e inibiu a participação de um número crescente de alunos, afastando-os da discussão exploratória. Penso, agora, que teria sido mais positivo se tivesse incorporado um momento declaradamente expositivo em torno do conceito de ponto aderente a um conjunto, seguido de um momento de trabalho autónomo com exercícios de consolidação sobre o mesmo tema.

3ª Aula: 29/03/2019

A terceira aula de 90 minutos iniciou com a introdução à Tarefa 2. Foi realizada uma discussão em grande grupo centrada no processo gráfico da aula anterior. No entanto, como a representação dinâmica executada com o Geogebra parecia ter originado alguma confusão entre o processo de determinação de pontos aderentes e a interpretação gráfica da definição de limite segundo Heine, decidi desenvolver o processo gráfico utilizando, como recursos, o quadro branco e marcadores de cor. A introdução à tarefa finalizou com a enunciação, no quadro branco, da definição de limite segundo Heine, dividindo-a em condições (ver subsecção de texto Conceitos).

O enunciado da Tarefa 2 foi distribuído por uma aluna da turma enquanto eram estabelecidas algumas das condições a respeitar durante e após a sua concretização. A monitorização do trabalho autónomo dos alunos em torno da tarefa decorreu de forma semelhante ao que aparece descrito na secção Recursos e estratégias de ensino. Contudo, durante as ações de monitorização, constatei que algumas formas de proceder, por parte dos alunos, deram azo a dificuldades inesperadas. A Tarefa 2 continha várias tabelas para preencher com os valores adequados aos termos gerais de várias sucessões (ver Anexo II) e tal preenchimento devia ser constituído como a principal ação de exploração da tarefa, a partir da qual era possível estabelecer um conjunto de conjeturas relacionadas com a determinação do limite de uma função num ponto aderente ao seu domínio. Mas, contrariando o que era expectável, muitos alunos preenchiam, em primeiro lugar, as tabelas e só prestavam atenção às conjeturas requeridas durante a exploração das mesmas, depois de todas terem sido preenchidas.

Com esta forma de proceder, os alunos passaram a visar as questões da tarefa de forma tão compartimentada, que acabaram por criar dificuldades na interpretação daquilo que, na realidade, era pedido. Por outro lado, isto impediu que a maior parte dos alunos se apercebesse das relações que podiam ser estabelecidas entre as conjeturas assumidas sobre a identificação de limites, durante a visualização das representações gráficas na introdução, e aquelas que deviam ser formuladas após o preenchimento das tabelas.

Admito, agora, que a integração na tarefa de pelo menos uma questão que pretendesse associar a variação dos valores das tabelas e a representação gráfica das funções, talvez tivesse colaborado para eliminar estas situações de conflito. No entanto, basta acrescentar que, perto do final da aula, alguns alunos ainda não tinham dado conta que a definição de limite segundo Heine estava exposta quer no quadro branco quer no enunciado da tarefa, para se chegar à conclusão que a participação pouco atenta dos elementos da turma originou bastantes dificuldades e atrasos no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem.

No final da aula, recolhi todas as resoluções dos alunos com a intenção de preparar a discussão coletiva das resoluções da Tarefa 2.

4ª Aula: 01/04/2019

A quarta aula de 90 minutos começou com a apresentação e discussão em torno das resoluções dos alunos da Tarefa 2. Para além dos procedimentos de questionamento já abordados anteriormente, esta discussão foi utilizada para alertar os alunos para a equivalência de significado de certos termos — aproximar, tender, convergir, ter como limite —, apesar da sua aplicação apresentar algumas diferenças. Por exemplo, é correto dizer que os valores de x se aproximam de ou tendem para, enquanto que uma sucessão (u_n) ou função $f(x)$ converge para ou tem como limite.

Também utilizei a resolução de um dos pares da turma, que evidenciava incorreções na articulação entre dados, justificação e conclusão num dos argumentos formulado, de maneira a mostrar que as características impostas pela definição de um conceito (neste caso de limite) podiam constituir uma excelente forma de fundamentar raciocínios.

Devido aos atrasos, verificados nas primeiras aulas, decidi introduzir algumas mudanças na discussão. Por exemplo, em vez de convidar alunos para expor e justificar as suas resoluções perante a turma, resolvi projetar, no quadro interativo, as resoluções mais pertinentes no que dizia respeito à mobilização de processos e conceitos relacionados com a aprendizagem do limite de funções, sem esquecer a coerência, concisão e sofisticação matemática dos argumentos apresentados nos processos de justificação de conjeturas e de prova de resultados requeridos pela Tarefa 2.

Depois da sistematização de conteúdos da Tarefa 2, optei por não efetuar a introdução, até agora habitual, dos tópicos a explorar na Tarefa 3. Como a simbologia utilizada nos limites laterais já tinha sido introduzida ao longo da segunda e terceira aulas, considerei que, desta vez, os alunos estavam aptos a desenvolver a tarefa sem precisarem de uma introdução prévia sobre os tópicos a explorar.

Após a distribuição dos enunciados da Tarefa 3, seguida da referência a alguns aspetos relacionados com o domínio da função cujo gráfico era representado a encabeçar a primeira questão da tarefa, foi iniciado um momento de trabalho autónomo dos alunos que iria estender-se até ao final da aula. Portanto, a discussão coletiva em torno das resoluções, mais uma vez, só veio a ocorrer na aula seguinte.

Durante a fase de monitorização do trabalho autónomo, foi necessário mostrar aos alunos o que era um contraexemplo porque eles desconheciam o significado desta noção.

Os objetivos de aprendizagem definidos para esta aula foram os seguintes: aplicar a definição de limite de uma função segundo Heine na determinação do limite num ponto aderente ao domínio dessa função; identificar os limites laterais num ponto aderente ao domínio de uma função; reconhecer que a existência de limite num ponto aderente que não pertença ao domínio da função exige que os limites laterais sejam iguais; reconhecer que só existe limite, quando os valores de x tendem para um ponto aderente que pertence ao domínio da função, se a imagem de x for igual aos valores dos respetivos limites laterais, se estes puderem ser definidos; conjeturar, justificar conclusões e encontrar contraexemplos.

5ª Aula: 03/04/2019

A última aula da intervenção letiva iniciou com uma discussão coletiva em torno das resoluções da Tarefa 3. Como parte desta aula estava destinada à realização de um momento de avaliação e eu não quis correr o risco que, da discussão inicial, viessem a resultar atrasos temporais irremediáveis, optei por respeitar os procedimentos que caracterizaram o desenvolvimento da discussão levada a cabo na aula anterior. Contudo, isto não significa que as intervenções dos alunos e as ações de questionamento, previstas e, efetivamente, desenvolvidas nas discussões anteriores, fossem de alguma forma banidas. Esta estratégia apenas procurou acautelar a gestão do tempo através da redução do tempo despendido no exercício de certas ações — por exemplo, escrever no quadro a resposta demora muito mais do que a sua projeção — e, se aconteceu algum tipo de limitação em relação às intervenções dos alunos, tal resultou involuntariamente das minhas opções e ações de orientação. A finalizar este momento, propenso ao debate de ideias, foi elaborada a sistematização referida na secção dedicada às descrições das tarefas, mais especificamente no final da descrição da Tarefa 3.

A intenção de realizar uma Questão aula (instrumento de avaliação utilizado) apenas foi divulgada aos alunos durante a própria aula e, apesar da reação adversa de um aluno, todos os alunos acabaram por aceitar a sua concretização. Este instrumento de avaliação foi realizado individualmente e estava previsto que os alunos pudessem consultar o manual e as sistematizações efetuadas no final das discussões coletivas promovidas ao longo da intervenção letiva.

Capítulo 4: Métodos e procedimentos de recolha de dados

Neste capítulo, é apresentada a metodologia de investigação utilizada neste estudo, atribuindo especial relevo aos aspetos relacionados com a recolha e análise de dados. Para além das opções metodológicas de índole geral, são descritos os métodos e instrumentos de recolha e análise de dados e os participantes no estudo de cariz investigativo. Por fim, faz-se uma breve referência às questões éticas envolvidas neste estudo.

4.1. Opções Metodológicas

A escolha da metodologia a adotar numa investigação deve estar relacionada com os seus objetivos e as questões a que se pretende responder. Com o estudo de cariz investigativo apresentado ao longo deste relatório pretendo compreender a capacidade argumentativa de alunos do 11.º ano na aprendizagem de conceitos e procedimentos envolvidos no estudo exploratório do limite de funções. Com este objetivo, utilizei estratégias de ensino de natureza exploratória que procuravam fomentar a argumentação matemática através da sua integração nas atividades de aprendizagem propostas em sala de aula.

As respostas às questões que orientaram este estudo focam-se em aspetos qualitativos do conhecimento dos alunos, requerendo a recolha de um conjunto de dados de empíricos de maneira a permitir uma interpretação descritiva do fenómeno em estudo. Assim, pela sua natureza empírica e relacional, a metodologia da investigação adotada seguiu, em termos gerais, o paradigma interpretativo mediante uma abordagem de tipo qualitativo (Erickson, 1986). A opção pelo paradigma interpretativo está relacionada com o facto de o estudo ter sido desenvolvido em torno das interações estabelecidas com uma turma do 11º ano de escolaridade — conjunto de pequena dimensão, não representativo da realidade escolar —, e consistido, sobretudo, na análise da atribuição de significados e valorização dos processos de interação, durante a realização das tarefas propostas em sala de aula (Erickson, 1986). Quando um estudo de cariz investigativo requer que a interpretação dos fenómenos seja efetuada segundo um paradigma de tipo interpretativo, o "objetivo primordial da investigação centra-se no significado humano da vida social e na sua clarificação e exposição por parte do investigador (Erickson, 1986). O paradigma interpretativo pressupõe a compreensão dos significados a partir da aceitação e valorização do mundo pessoal dos intervenientes, exigindo a interação entre investigador e investigado de modo a constituir conhecimento, com base num processo indutivo, interativo e em espiral (Erickson, 1986).

Por outro lado, se tomarmos em consideração as características das investigações qualitativas apontadas por Bogdan e Biklen (1994), torna-se evidente que esta abordagem pode revelar-se ajustada aos propósitos deste estudo: (1) "na investigação qualitativa a fonte directa de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal" (p. 47); (2) "a investigação qualitativa é descritiva" (p. 48); (3) "os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos" (p. 49); 4) "os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva" (p. 50); 5) "o significado é de importância vital na abordagem qualitativa" (p. 50).

Nesta ótica, posso recorrer às características indicadas por Bogdan e Biklen (1994) para explicitar a adequação da abordagem qualitativa ao estudo desenvolvido: 1) A fonte direta dos dados foram os alunos da turma do 11.º ano observados em ação, na realização das tarefas de exploração elaboradas por mim, no seu ambiente natural – a sala de aula. A minha ação estratégica e as interações despoletadas com os discentes, enquanto professor-investigador, permitiram percecionar significados de maneira a obter uma melhor compreensão das ações e produções dos alunos; 2) Os dados foram obtidos de forma a permitir uma descrição geral do ambiente em sala de aula e uma descrição mais específica dos vários momentos de aula e das ações dos alunos; 3) Para o estudo foi mais importante adquirir uma compreensão profunda dos processos de natureza argumentativa utilizados pelos alunos, permitindo acompanhar em detalhe a evolução das suas aprendizagens, do que o resultado final das suas resoluções. 4) Este estudo não foi elaborado de forma a confirmar ou rejeitar uma tese pré-estabelecida. O objetivo deste estudo pressupõe antes a necessidade de construir uma compreensão a partir da investigação e análise dos dados recolhidos, ou seja, procura induzir uma compreensão a partir de um conjunto de dados obtidos empiricamente; 5) Este estudo requereu que a minha atenção se focalizasse nas diferentes ações dos participantes (alunos) — durante as discussões em grande grupo, na resolução das tarefas, nas interações estabelecidas entre alunos ou entre aluno-professor, nas reações individuais e comportamentos de grupo — com o intuito de aproveitar todas as ocasiões para a criação de significados, cada vez mais prenhes, que concorressem para a construção de uma compreensão sobre a capacidade argumentativa dos alunos e a sua integração no processo de aprendizagem dos limites de funções.

4.2. Participantes no estudo

Atendendo ao objetivo do estudo apresentado ao longo deste relatório e à abordagem qualitativa de tipo interpretativo adotada, considerei que era importante focar o estudo numa população que pudesse ser caracterizada pela sua elevada diversidade e abrangência. De forma a constituir um vasto leque de possibilidades comparativas, que permitisse atingir uma caracterização o mais detalhada possível dos vários processos argumentativos requeridos pelas atividades de aprendizagem assim como dos conhecimentos mobilizados e das aprendizagens efetuadas ao longo da intervenção letiva, a escolha dos participantes no estudo recaiu sobre a totalidade dos 27 alunos da turma.

Como as tarefas de exploração realizadas ao longo da intervenção letiva requeriam que fossem constituídos grupos de alunos, estes foram divididos em pares e trios, aproveitando a disposição habitual verificada nas aulas de Matemática. Todavia, as faltas de presença de alguns alunos obrigaram a constituir alguns grupos diferentes de tarefa para tarefa. Na tarefa 1, três alunos tiveram falta de presença, o que obrigou a formar um grupo de três alunos (trio X), além dos habituais trios (Y e Z), pares (de A a G) e do aluno 1, que nas tarefas iniciais trabalhou sem ter parceiro. Na tarefa 2, apenas um aluno não compareceu na aula e, por isso, mantiveram-se os três trios (X, Y e Z) e formou-se mais um par (par H), continuando o aluno 1 a trabalhar sozinho. Na tarefa 3, os alunos formaram três trios (X, Y e Z) e nove pares (de A até I), pois, devido á presença de todos os alunos, foram formados mais dois pares que na tarefa 1, integrando o aluno que não tinha grupo no par I. Na questão aula, quatro alunos não compareceram e os alunos não formaram grupos. Na tarefa 4, dois alunos do trio X faltaram e, por isso, formaram-se oito pares de alunos — A até I, exceto E — e três trios — E, Y e Z — já que o terceiro elemento do trio X foi integrado no par E.

4.3. Métodos e instrumentos de recolha de dados

A seleção dos métodos e instrumentos de recolha de dados utilizados num estudo depende do objetivo e do contexto relativamente aos quais o estudo será desenvolvido, sem nunca esquecer os conhecimentos e interesses do próprio investigador (Bogdan & Biklen, 1994). Neste estudo, a recolha de dados incluiu a observação participante, com registo áudio do trabalho autónomo de alguns grupos de aluno na realização das tarefas propostas em aula, registo vídeo das discussões coletivas das tarefas e notas de campo registadas pelo investigador bem como a recolha documental das produções escritas dos alunos, na realização das tarefas de exploração propostas na sala de aula e de uma Questão aula.

Observação participante. A observação oferece ao investigador a oportunidade de recolher dados no próprio local onde ocorrem os fenómenos que ele quer pesquisar, suscitando uma recolha de dados menos sujeita a interferências e ruídos de apreciação, ao mesmo tempo que permite a observação de detalhes que dizem respeito à configuração física do contexto no qual o estudo se desenvolve (ambiente físico e sua organização), à configuração humana (organização e caraterísticas dos indivíduos observados), à configuração inter-relacional (interações que ocorrem) e à configuração inerente às pedagogias utilizadas em sala de aula (recursos utilizados e sua organização, estilos pedagógicos) (Morrison, 1993).

Para Dias e Morais (2004), a observação pode ser classificada a partir de dois aspetos: quanto à sua função e quanto ao posicionamento do observador. No que diz respeito à função, a observação teve um caráter descritivo, uma vez que, neste estudo, fazia sentido dispor de uma perspetiva caracterizadora dos fenómenos de interação social e da participação nas atividades de aprendizagem, e, simultaneamente, de caráter avaliativo, já que a observação também forneceu dados que ajudaram a definir e a alterar estratégias de ensino e de questionamento, sem esquecer a sua contribuição para a reflexão crítica sobre as opções didático-pedagógicas assumidas e sobre as funções que cabe ao professor desempenhar. No que concerne ao posicionamento do observador, a observação participante foi constituída como o método de recolha de dados presente em toda a unidade de ensino.

Cumprir o duplo papel de professor e investigador, conferiu-me a possibilidade de estabelecer contato direto com o objeto da observação, vendo, ouvindo e experienciando a realidade, tal como acontece com qualquer indivíduo que participe e interaja com o contexto vivencial em que se encontra inserido, com o objetivo de a analisar em função do objetivo do estudo (Marshal & Rossman, 2006).

Neste sentido, considero que o duplo papel de professor e investigador contribuiu para a reflexão e possibilitou a minimização de alterações comportamentais evidenciadas pelos alunos, por analogia com as investigações em que o observador é externo. No entanto, também reconheço que esta dupla dimensão pode acarretar alguns fatores limitadores, relacionados com a observação direta das aulas. Para além de se poder perder uma perspetiva distanciada, necessária ao questionamento de conceitos e práticas, a observação de um investigador não participante pode tornar-se mais abrangente e o registo das observações pode ser melhor orientado.

A observação participante implicou que o registo escrito daquilo que havia sido visto, ou ouvido, enquanto decorriam as aulas, só pudesse ser feito no final das aulas, sob a forma de notas de campo. As notas de campo são "o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiência e pensa no decurso da recolha e reflectindo sobre os dados de um estudo qualitativo" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 150). Estas notas incluíram elementos de natureza crítica, reflexiva e descritiva, respeitantes a aspetos a melhorar no que concerne ao questionamento dos alunos durante as discussões coletivas e à explicação da terminologia usada (não percebi logo que a maioria dos alunos não reconhecia o significado de conjeturar), a episódios que tenham decorrido durante as aulas ou a comentários pertinentes para usar durante as discussões ou nas aulas seguintes. Recordo-me, por exemplo, de um comentário de um aluno sobre o modo de realizar uma aproximação a algo, que foi recorrentemente utilizado: dizia o aluno que "podemos aproximarmo-nos sem tocar ou podemos fazê-lo tocando".

A observação das aulas lecionadas, durante a prática de ensino supervisionada, também contemplou a captação vídeo das discussões coletivas referentes às tarefas de exploração, mediante a utilização de uma camara de vídeo, e a gravação áudio do debate de ideias entre pares de alunos, durante os momentos de trabalho autónomo. A camara de vídeo era instalada de forma a captar, com legibilidade, o quadro branco, onde os alunos apresentavam as suas resoluções. Os gravadores de áudio não puderam ser utilizados em todas as aulas (apenas a partir da terceira) porque não haviam dispositivos disponíveis. Os aparelhos eletrónicos eram instalados antes das aulas começarem e posicionados de forma a não incomodar a circulação e os movimentos dos alunos, que rapidamente se adaptaram aos aparelhos.

Recolha documental. Uma vez que a observação participante pode acarretar algumas limitações ao nível da dificuldade do registo de dados e as gravações vídeo e áudio são condicionadas pelos limites de captação próprios de cada aparelho, a recolha documental acabou por assumir um papel fundamental neste estudo. Porém, a sua importância, para este estudo, não resultou apenas da possibilidade que tal metodologia oferece no sentido de reduzir as limitações referidas. A recolha documental torna-se bastante preciosa porque as produções escritas apresentam evidências da compreensão dos alunos de processos e conceitos, bem como das suas dúvidas e dificuldades, durante a realização das tarefas (Cohen, Manion & Morrison, 2007). Neste estudo, as produções escritas também permitiram analisar diferentes processos de resolução, apreciar as estratégias adotadas e, acima de tudo, analisar detalhadamente as argumentações apresentadas pelos alunos (Cohen, Manion & Morrison, 2007).

A recolha documental foi, portanto, constituída pelas produções escritas dos alunos, em sala de aula: as resoluções das tarefas de exploração e uma questão aula. Foram tiradas fotocópias tanto das produções com as resoluções das tarefas como da questão aula de forma a permitir a recolha e análise destes dados. As produções referentes às tarefas de exploração eram sempre recolhidas antes das discussões em grande grupo, garantindo que as respostas não eram alteradas após as correções-discussões.

4.4. Métodos de análise de dados

A análise de dados corresponde ao processo de trabalho centrado nos dados recolhidos de modo a definir aquilo que deve ser transmitido aos outros, visando a organização e sistematização dos dados recolhidos, a procura de padrões e a determinação de características relevantes para as questões levantadas (Bogdan & Biklen, 1994). Neste sentido, a análise de dados procurou prestar-se à organização, compreensão e atribuição de significado dos dados recolhidos durante o estudo de cariz investigativo, com o objetivo de alcançar respostas para as questões de investigação que orientaram o seu desenvolvimento desde o início.

Neste estudo, a análise de dados foi estruturada à priori, a partir das questões de investigação suscitadas logo no seu início: (1) caracterização dos processos argumentativos usados pelos alunos e indicação das dificuldades evidenciadas no seu uso (2) identificação dos conhecimentos matemáticos mobilizados pelos alunos nas suas argumentações, (3) determinação das aprendizagens relacionadas com o limite de funções e das dificuldades reveladas em tais aprendizagens.

Selecionei um conjunto de resoluções, tanto das tarefas de exploração como da questão aula realizadas ao longo da unidade didática, que pretendiam evidenciar a variedade de resoluções apresentadas pelos alunos e fornecer dados que se prestassem a cada uma das questões em análise. A análise dos dados foi complementada pelas notas de campo, resultantes da observação participante, e pela informação recolhida da observação dos momentos de discussão e do trabalho autónomo dos alunos, provenientes das gravações em vídeo e áudio obtidas em cada um destes momentos. Devido às suas potencialidades e simplicidade, utilizei o modelo elementar de Toulmin, proposto por Pedemonte (2002), para analisar a dificuldade dos alunos na construção de argumentos aquando da formulação de justificações, de conjeturas ou da realização de processos de prova matemática.

4.5. Questões éticas

De acordo com as orientações da Carta Ética para a Investigação em Educação e Formação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, foram asseguradas as questões éticas necessárias ao desenvolvimento de um estudo de cariz investigativo, cumprindo, em particular, as prescrições consagradas ao consentimento informado, à confidencialidade e privacidade dos participantes. Assim, os participantes do estudo tiveram de ser devidamente autorizados pelos seus representantes legais, depois de informados dos seus objetivos, da necessidade de recolher dados e posterior divulgação, das características voluntárias da sua participação e da possibilidade de desistência, sem esquecer a duração temporal do seu envolvimento. Por outro lado, a realização e divulgação do estudo exigiram a utilização de nomes fictícios de forma a garantir o anonimato dos participantes, não surgindo qualquer tipo de referência que venha a permitir a identificação da turma com a qual o estudo foi realizado.

No que diz respeito à rúbrica que salvaguarda contra as possibilidades de falsificação e plágio, tentei fornecer garantias sobre a transparência e rigor do estudo, comprometendo-me a não plagiar, fabricar, falsificar ou distorcer os dados e resultados.

Capítulo 5: Análise de dados

Neste capítulo, é apresentada a análise dos dados recolhidos na intervenção letiva estruturada em três dimensões de análise, sendo cada uma delas correspondente a uma questão de investigação. Na primeira dimensão, procura-se caracterizar os processos argumentativos desenvolvidos pelos alunos na elaboração de justificações e na realização de provas matemáticas e identificar as dificuldades encontradas na construção de argumentos, usando como referência o modelo elementar de Toulmin. Na segunda, identificam-se os conhecimentos mobilizados pelos alunos quando as tarefas exploratórias, a questão aula ou as discussões coletivas requeriam a formulação de argumentos. Por fim, na última dimensão, pretende-se compreender as aprendizagens dos alunos na unidade didática e as dificuldades evidenciadas pelos alunos durante o processo de aprendizagem.

5.1. Caracterização dos processos argumentativos usados pelos alunos e as dificuldades evidenciadas no seu uso

Nesta secção, a análise dos dados foi realizada de maneira a propiciar elementos que permitiram caracterizar as justificações e os processos de provas produzidos pelos alunos, sem esquecer as dificuldades evidenciadas na construção dos argumentos apresentados.

Para caracterizar a elaboração de justificações comecei por apreciar que meios foram utilizados para expressar tais justificações, quando nas tarefas ainda não era requerido que fossem elaboradas sob a forma de argumentos: linguagem natural, simbologia matemática, esquemas, representações numéricas ou tabelares, representações gráficas, processos algébricos. Depois, procurei caracterizar o processo de apresentação de justificações inerente à formulação de conjeturas. Na formulação de conjeturas incentivei os alunos a utilizar uma estrutura argumentativa inspirada no modelo elementar de Toulmin, proposto por Pedemonte (2002), verificando se os alunos eram capazes de distinguir e integrar os três elementos (dados, conclusões e justificações) previstos por esta estrutura. Em ambas as situações, também me baseei nas formas de convicção (convicções externas, esquemas empíricos ou esquemas dedutivos) reveladas na sua elaboração.

Para caracterizar as provas matemáticas, tentei compreender que razões ou propósitos foram associados à sua concretização e que tipo de prova utilizaram (prova por exibição, prova com recurso ao exemplo genérico ou prova intelectual). Para além da elaboração de justificações, o modelo elementar de Toulmin também foi usado para apreciar os processos de prova.

A identificação das dificuldades dos alunos na utilização destes processos foi efetuada à medida que se procedeu à caracterização de cada um dos processos referidos.

Elaboração de justificações

Na questão 1 da tarefa ‘Limites no infinito de funções reais de variável real’ (tarefa 1), todos os grupos de alunos indicaram um valor lógico em relação a seis afirmações matemáticas, que identificavam os limites no infinito de três funções reais de variável real cujas expressões algébricas eram fornecidas no enunciado da tarefa. Era suposto que os alunos utilizassem a máquina de calcular para obter as representações gráficas das funções de maneira a conseguirem identificar o limite das funções através da interpretação dos gráficos respetivos, já que não tinha sido efetuada qualquer tipo de abordagem algébrica à determinação do limite de funções reais de variável real.

A maioria dos alunos apresentou o valor lógico adequado, acompanhado da respetiva justificação de maneira a explicar o porquê das opções tomadas. Apenas os pares A e D apresentaram respostas incorretas. O par A não identificou o limite das funções através da representação gráfica das funções, utilizando a manipulação algébrica das expressões das funções para justificar as atribuições de valor lógico, como pode ser verificado na figura.

Figura 10. Resolução do par A: questão 1 da tarefa 1.

Durante a fase de trabalho autónomo, as alunas que compunham este grupo tinham evidenciado alguma resistência em identificar o limite graficamente porque diziam saber determiná-lo através de processos algébricos, que o explicador de uma das alunas lhe havia ensinado previamente (este facto foi registado como nota de campo). Embora também tivessem aprendido a determinar algebricamente o limite de sucessões, a mobilização deste conhecimento não era suficiente, pois, neste caso também tinham de determinar o limite quando $x \to -\infty$. Contudo, a competência evidenciada na determinação algébrica de limites acabou por se revelar insuficiente, já que na alínea a_2) não conseguiram identificar que $10-(-\infty) = +\infty$, em vez de $-\infty$. Nas alíneas b) a incorreção dos valores lógicos deveu-se mais a questões relacionadas com a falta de atenção e de rigor. Ao passo que na alínea b_1) a justificação indicava que o limite era $+\infty$, logo o valor lógico correspondente seria V (verdade), em vez do valor F (falso), indicado pelas alunas, na alínea b_2) enganaram-se a escrever a expressão da função, elevando o denominador ao quadrado, o que acabou por causar problemas. Ao depararem-se com uma indeterminação $\frac{+\infty}{+\infty}$, não conseguiram levantá-la, e incorreram na dificuldade assinalada por Cornu (1983) ao não compreenderem que este quociente era passível de ser determinado, podendo dar $\pm\infty$ ou um valor concreto. Contudo, como nas alíneas c) as alunas conseguiram levantar as indeterminações sem evidenciar dificuldades, admito que o facto de as opções de resposta serem $-\infty$ ou $+\infty$ pode ter desvirtuado a sua resolução, optando por responder $+\infty$ só porque tinham de escolher uma destas possibilidades. Assim, a justificação apresentada por este grupo parece resultar da formação de convicções externas, já que não houve qualquer tentativa de atribuição de significado aos procedimentos realizados de maneira a superar os obstáculos que foram surgindo e preferiram legitimar a sua justificação em processos aprendidos fora do contexto de aprendizagem da tarefa 1. Porém, também é possível que a convicção das alunas do par A tenha sido formada a partir da mobilização de conhecimentos prévios relacionados com as sucessões e, por isso, tenha sido formada a partir de um esquema de natureza dedutiva. Outro dois pares (B e C) também utilizaram o processo algébrico na primeira alínea, mas nas outras isso já não aconteceu. O facto de se terem deparado com indeterminações nas alíneas seguintes e não possuírem plena convicção, ou conhecimentos suficientes, sobre os procedimentos a realizar (Cornu, 1983), acabou por originar a necessidade de usar outro tipo de representações na elaboração das justificações. O par B, tal como o par D e o trio X, apresentaram as suas justificações de forma pouco elaborada, exibindo apenas os esboços das representações gráficas obtidas na calculadora gráfica, sem fazerem qualquer alusão à interpretação dos gráficos. Enquanto os grupos B e X não evidenciaram qualquer dificuldade nas suas resoluções, a resolução do par D apresentou alguns problemas, como pode ser observado na Figura 11.

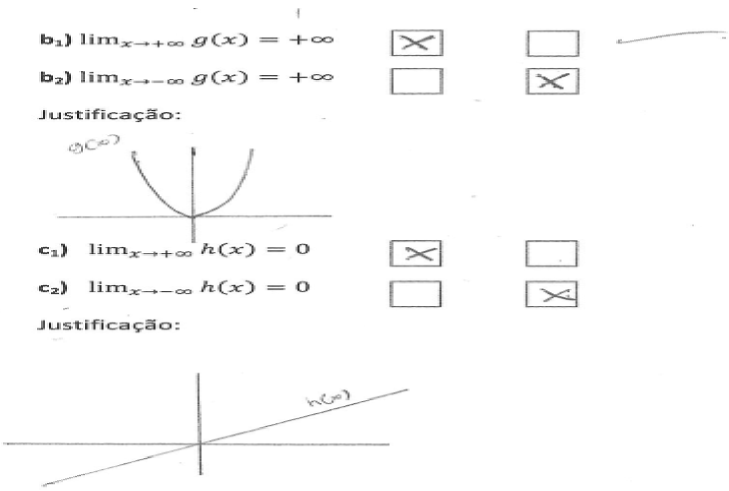


Figura 11. Resolução do par A: questão 1 da tarefa 1.

Nas alíneas b) e c), os esboços gráficos do par D não correspondem às expressões das funções enunciadas na tarefa 1. No entanto, parece que as justificações também não se basearam na interpretação das representações gráficas, já que só na alínea b_1) foi apresentada uma resposta consentânea com a justificação, apesar de três dos valores lógicos indicados corresponderem aos valores corretos. Baseando-me em crenças pessoais, inspiradas nas observações e interações estabelecidas ao longo do ano letivo, admito que os alunos deste par não se esforçaram em estabelecer um nexo de coerência entre as representações gráficas e os valores lógicos indicados, tendo apresentado os esboços gráficos porque era fácil utilizá-los como justificações e indicaram aqueles valores lógicos porque devem ter recebido essa informação de outros alunos.

Ao contrário dos pares B, D e do trio X, os restantes grupos apresentaram justificações mais elaboradas, onde se notava a intenção de explicarem o porquê das suas opções complementando os esboços gráficos com outros elementos justificativos. A Figura 12 mostra as justificações do par E e do trio Z, em duas das alíneas da questão 1.

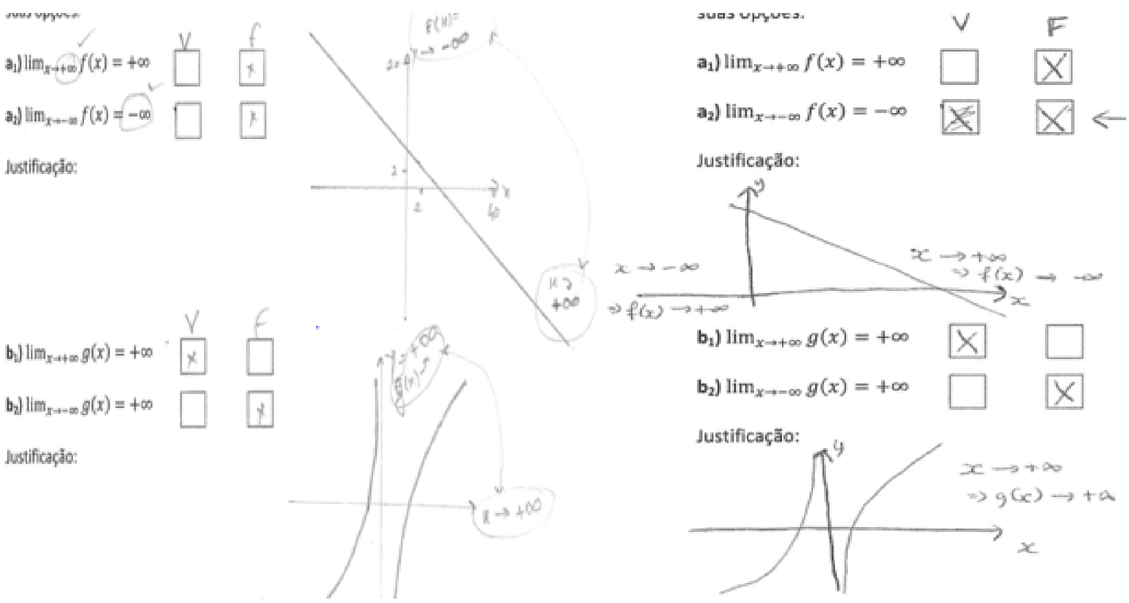


Figura 12. Resolução do par E(esquerda) e do trio Z (direita): questão 1 da tarefa 1.

Nestas justificações constavam esboços gráficos das funções onde surgiam incorporados esquemas de setas com a intenção de representar o processo de dupla aproximação mediante o qual havia sido feita a leitura dos limites das funções, fundamentando deste modo a atribuição dos valores lógicos em todas as alíneas. O esquema apresentado pelo trio Z constitui uma justificação mais completa do que o esquema do par E pois, além de explicar a tendência das imagens quando $x \to +\infty$, também o faz quando $x \to -\infty$, pelo menos na alínea a). Considero, ainda, que o esquema de setas do trio Z é mais claro devido à localização das informações e à forma como explica a relação entre estas.

A Figura 13 mostra as estratégias seguidas pelos par C e trio Y nas alíneas b) e c), sendo bastante semelhantes às dos pares F e G, assim como a do aluno 1.

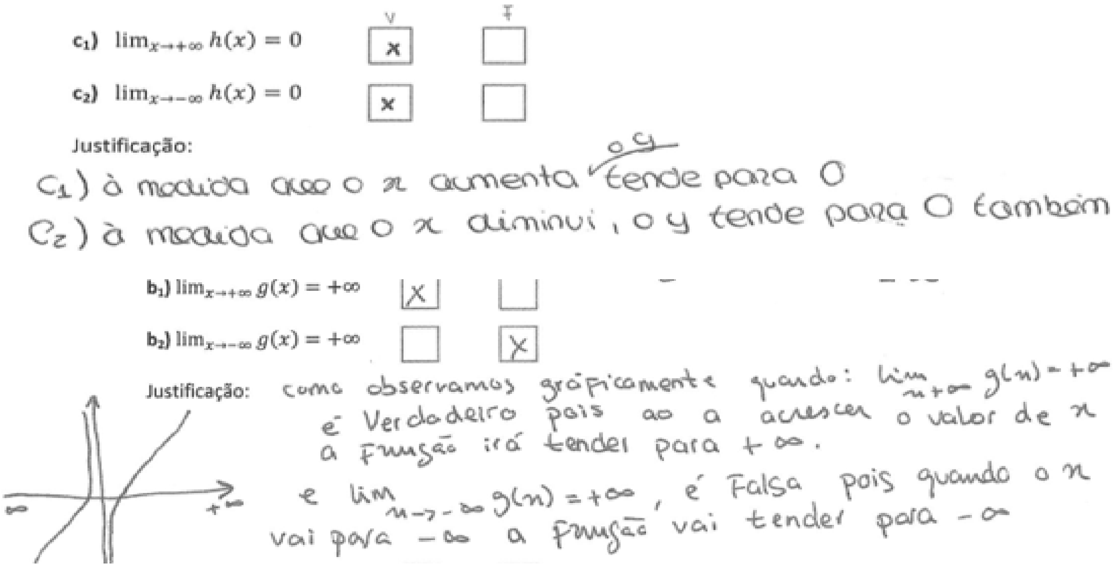


Figura 13. Resolução do trio Y (em cima) e do par C (em baixo): questão 1 da tarefa 1.

Para além de incluírem a representação dos gráficos das funções nas suas justificações, obtidos com a calculadora gráfica, estes grupos inseriram justificações escritas em linguagem natural onde explicavam o porquê dos valores lógicos atribuídos, descrevendo verbalmente o processo de dupla aproximação aplicado na visualização dos gráficos.

Nas justificações apresentadas na tarefa 1, verificou-se que os alunos dividiam as suas preferências, de forma mais ou menos equilibrada, no que diz respeito aos meios utilizados. As justificações por esboços gráficos foram tão utilizadas como as justificações elaboradas em linguagem natural, mas inicialmente verificou-se uma tendência para recorrerem a procedimentos algébricos que, em grande medida, foram sendo abandonados com o decorrer da tarefa. Com menos impacto na generalidade da turma, a representação de esquemas chegou a ser utilizada por três grupos, embora apenas dois tenham mantido até ao fim a resolução da questão 1 na forma de esquema.

Excetuando o par de alunos A, todos os grupos justificaram a atribuição dos valores lógicos baseando-se no processo de identificação do limite de funções a partir da leitura de representações gráficas obtidas através da calculadora gráfica. Considero, assim, que em todos os grupos, exceto os pares A e D, por razões diversas, a formação de convicção por esquemas empíricos foi suficiente para elaborar as justificações que acabaram de ser analisadas.

Durante a discussão da tarefa 1, em grande grupo, abordei a possibilidade de utilizar, nas justificações, terminologia mais adequada do ponto de vista matemático porque, segundo estudos empíricos sobre a aprendizagem de limites, algumas das dificuldades reveladas no estudo dos limites estão relacionadas com mal-entendidos linguísticos (Cornu, 1991). Pretendia, desta forma, tornar a utilização de verbos como tender, aproximar, convergir, ou de termos derivados destes, mais significativa para os alunos, realçando que seria mais adequado usar os termos tende ou aproxima quando nos referimos à tendência registada numa sequência de valores, enquanto o termo converge é mais adequado quando nos referimos ao comportamento de um objeto matemático, por exemplo, quando uma função $f(x)$ ou uma sucessão de termo geral u_n convergem para um certo valor limite. O trecho seguinte é um exemplo que procura refletir isso mesmo, mas convém salientar que, antes desta situação, este assunto já tinha sido debatido noutros momentos desta discussão e enquanto decorria a fase de monitorização do trabalho autónomo.

> **Professor:** Portanto, o [aluno] Y_1 disse [mais ou menos] corretamente. Como é que o [aluno] Y_1 podia dizer aquilo que acabou de dizer utilizando os termos aproxima, tende, converge? (…) Então, podes repetir o que dissestе para a [aluna] Z_1 tentar?

Aluno Y_1: Na primeira o x aumenta e na segunda o x diminui, portanto, independentemente de o x aumentar ou diminuir, a função vai tender para zero.
(…) **Aluna Z_1:** Quando os valores de x tendem para $+\infty$, as imagens vão tender para zero e a mesma coisa quando x tende para $-\infty$, as imagens vão tender para zero, pela representação gráfica de *h(x)*.

De qualquer forma, penso que a participação dos alunos consegue mostrar que o debate prévio à situação exposta neste trecho foi positivo para as aprendizagens dos alunos, quer em relação aos limites quer em termos argumentativos (a utilização de vocabulário adequado torna os argumentos mais convincentes).

Utilizando outra ocasião decorrente da discussão coletiva, associada à resolução da questão 2.1 da tarefa 1, é possível constatar a dificuldade dos alunos em elaborar um discurso justificativo aplicando uma terminologia matematicamente mais adequada. Apenas um grupo (trio Z) respondeu à alínea a) da questão 2.1, tendo apresentado como justificação o gráfico de uma função cúbica que satisfazia os requisitos do juízo de valor adotado como correto pelos elementos do trio Z.

Pretendendo obter uma justificação mais rica tanto em termos argumentativos como matemáticos, revelo, de seguida, a transcrição de parte da discussão relacionada com esta questão:

Professor: A função $g(x)$ pode ser uma função polinomial de grau 3?
Aluna F_1: Não.
Professor: Porquê?
Aluna F_1: Porque cada x ia ter mais do que uma imagem, acho eu.
Professor: Porque dizes isso.
Aluna F_1: Então não é aquela que faz assim (e com a mão fez o esboço de uma onda).
Professor: É, mas… então eu vou fazer (comecei a representar um gráfico).
Aluna F_1: Ah não, já sei…
Professor: Se é um polinómio é porque é uma função real de variável real (descartando definitivamente a hipótese da aluna). (…) Então podia ser uma onda assim… (representei o gráfico de uma função cúbica que não respeitava as condições do enunciado) Tendo em atenção os dados sobre os limites da função g, isto está de acordo com a representação gráfica?
Aluno X_1: Não.
Professor: Porquê?
Aluno X_1: Porque quando o x está a ir para $-\infty$ o gráfico também vai para $-\infty$.
Professor: Exato. E o limite exige que…
Aluno X_1: O limite exige que vá para $+\infty$.
Professor: Então e isso torna a afirmação falsa ou há outra hipótese?
Aluna Z_2: Há outra.
Professor: E qual é?
Aluna Z_2: Então tem de virar o gráfico. Começando em cima e acabando em baixo.
Professor: Exatamente. Mas, virar o gráfico significa o quê?
Aluna Z_2: Então, começar em cima e acabar em baixo.
Professor: Certo… e em termos matemáticos como é que isso podia ser dito de outra forma? (Como ninguém acrescentou mais nada, resolvi escrever o polinómio de grau

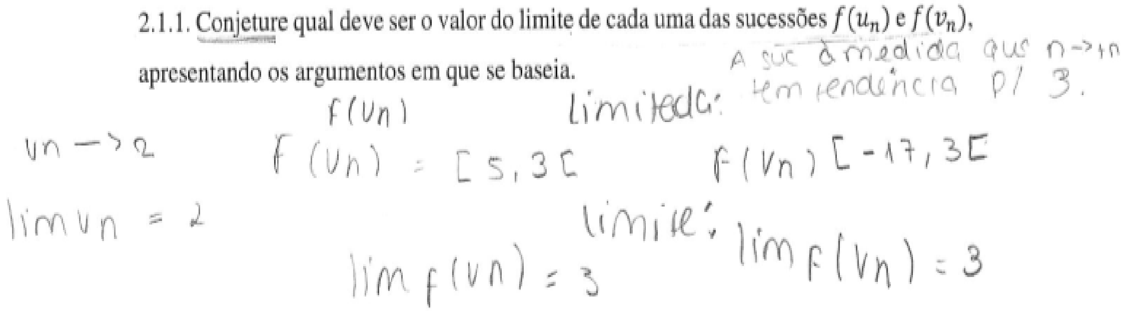
3 na forma reduzida, sem atribuir valores aos coeficientes... $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$)
Professor: A função g polinomial de grau 3 podia ser escrita assim, sem definir os valores dos coeficientes. Qual seria a diferença… (não cheguei a acabar a frase).
Aluna Z_1: O a tinha de ser negativo.
(…) **Professor:** Então podemos concluir que 2.1.a) é verdadeira, sendo $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a < 0$.

Na tarefa "Vamos investigar a definição de limite segundo Heine" (tarefa 2), os alunos foram convidados, pela primeira vez, a formular conjeturas e a apresentar razões que as sustentassem. No enunciado, com base no modelo elementar de Toulmin, era sugerido que as justificações fossem apresentadas de acordo com a seguinte estrutura: Dado que (explicar factos), então o limite não pode ser estudado, porque (justificar em que baseia tal raciocínio). Mas, ainda antes, de efetuar a análise de algumas das produções escritas dos alunos, penso que a apresentação de um curto trecho, transcrito do registo áudio obtido com o trio Z ao longo da exploração da tarefa 3, pode ser útil para dar uma ideia da perplexidade e resistência que a maioria dos elementos da turma demonstrou inicialmente, perante a insistência em pretender respostas sob a forma de argumentos.

Aluna Z_2: (Lendo o enunciado da questão 1.1.1 da tarefa 3) Comente se concorda, ou não, com a existência e com os valores dos limites indicados nas alíneas seguintes. No seu comentário, apresente argumentos que suportem o seu ponto de vista.
Ai, já estou farta de argumentos!!
Aluna Z_1: Parece filosofia!

As questões 2.1.1 e 3.1.1 eram complementadas pelas perguntas 2.1.2 e 3.1.2, respetivamente, com o objetivo de verificar se os alunos sentiam necessidade de relacionar cada par de questões. Ou seja, para verificar se as conjeturas apresentadas em 2.1.1 e em 3.1.1, serviam para validar, ou não, as afirmações apresentadas em 2.1.2 e 3.1.2, o que levava os alunos a testar as suas conjeturas antes de as usarem. A estrutura argumentativa só era enunciada junto às questões 2.1.2 e 3.1.2 para verificar se os alunos também optavam por formular as conjeturas de acordo com o modelo sugerido ou, pelo contrário, se sentiam aptos para construir argumentos conjeturais sem seguir um modelo pré-estabelecido. Contudo, apesar de quase todos os grupos de alunos terem preenchido as tabelas de forma correta, quase nenhum apresentou argumentos nem para sustentar as conjeturas nem no passo subsequente de atribuição de um valor de verdade às afirmações matemáticas.

Apenas o par de alunos A e o aluno 1, que realizou a tarefa sem integrar nenhum grupo, relacionaram os argumentos apresentados em 2.1.1 com 2.1.2 (par A) e 3.1.1 com 3.1.2 (aluno 1), mas nenhum destes alunos conseguiu usar eficientemente a sugestão do enunciado. Nas Figuras 14 e 15 são expostas as resoluções do par A, das duas questões do grupo 2.


2.1.1. Conjeture qual deve ser o valor do limite de cada uma das sucessões $f(u_n)$ e $f(v_n)$, apresentando os argumentos em que se baseia.

A suc à medida que $n \to +\infty$ tem tendência p/ 3.

$f(vn)$ limitada:

$vn \to 2$ $f(vn) = [5,3[$ $f(vn)$ $[-17,3[$

$\lim vn = 2$ limite: $\lim f(vn) = 3$

$\lim f(vn) = 3$

Figura 14. Resolução do par A: questão 2.1.1 da tarefa 2.


falsa, dado que existem suc cujo $f(un)$ é 3.

Figura15. Resolução do par A: questão 2.1.2 da tarefa 2.

As conjeturas formuladas pelo par A acerca dos limites das sucessões $f(u_n)$ e $f(v_n)$ foram justificadas a partir da leitura das tabelas cujo preenchimento denunciava a tendência dos termos de ambas as sucessões para o valor 3. Já a resposta à questão 2.1.2 revela que o par conseguiu relacionar os limites destas sucessões com o valor do limite da função *f(x)*, quando $x \to 2$, parecendo resultar a relação da satisfação das condições impostas na definição de limite segundo Heine. No entanto, considero que os argumentos apresentados acabam por padecer de alguma inconsistência. Em primeiro lugar, na questão 2.1.1, a justificação não se torna logo percetível, sendo difícil perceber, de entre os elementos apresentados, quais representam as conclusões (conjeturas) e quais representam as justificações correspondentes. Por outro lado, as alunas do par A parecem ter valorizado mais a indicação sobre a limitação dos termos das sucessões, entre o valor mais baixo e mais alto das tabelas, em detrimento daquilo que era realmente pertinente para a justificação: a informação sobre a tendência evidenciada pelos valores da tabela, ou seja, à medida que $n \to +\infty$, as sucessões $f(u_n)$ e $f(v_n)$ tendiam para 3. As alunas parece que desconfiam da justificação correta e, por isso, não se importam de juntar várias razões que poderiam justificar a determinação dos limites de $f(u_n)$ e $f(v_n)$. Assim, no caso de umas não servirem, estariam lá outras, evidenciando mais preocupação em não errarem do que em estabelecer uma compreensão confiável, coerente e transmissível. No entanto, isto pode indicar uma das dificuldades referidas por Boavida (2005) que aponta para o não reconhecimento das funções argumentativas a atribuir aos vários elementos de que dispõem e, talvez, este seja o principal motivo para explicar a não utilização da estrutura argumentativa sugerida.

Não obstante o preenchimento incorreto da tabela pelo par de alunos G, se compararmos a conjetura do par A com a do par G (Figura 16), é notória a vantagem, em termos de legibilidade, do argumento apresentado pelo par G, se bem que também não optaram por usar a estrutura sugerida.

2.1.1. Conjeture qual deve ser o valor do limite de cada uma das sucessões $f(u_n)$ e $f(v_n)$, apresentando os argumentos em que se baseia. O limite de F(un) é 3 e o de F(vn) é -2, pois à medida que os valores de n aumentam f(un) aproxima-se de 3 e f(vn) de -2, segundo os valores da tabela.

Figura 16. Resolução do par G: questão 2.1.1 da tarefa 2.

No entanto o par G, assim como a maioria dos grupos, nem sequer respondeu à questão 2.1.2, apesar de ter preenchido a tabela do exercício 3, o que indicia uma compreensão insuficiente da definição de limite segundo Heine.

É verdade que a resolução da questão 2.1.2. do par A teria ganho força de persuasão, se tivesse partido da convergência das sucessões $f(u_n)$ e $f(v_n)$ (conjeturada em 2.1.1) e juntasse a definição de limite segundo Heine para justificar/garantir a impossibilidade do limite da função ser diferente de 3, quando os valores de *x* se aproximam de 2. Porém, o facto de não ter construído o argumento desta forma não invalida que a convicção das alunas do par A pudesse ter sido formada por esquemas de natureza dedutiva, de tipo axiomático, já que conseguiram estabelecer a relação correta entre as condições requeridas para satisfazer a definição de limite segundo Heine e os limites das sucessões $f(u_n)$ e $f(v_n)$. Assim, parece-me que as dificuldades evidenciadas pelo par A são sobretudo de carater argumentativo enquanto que o par G parece também evidenciar dificuldades ao nível da compreensão relacional (Skemp, 1978).

Como surge exposto na figura seguinte, o aluno 1 indicou valores para os limites das sucessões $g(u_n)$ e $g(v_n)$ e não apresentou uma justificação que explicasse em que se baseou, dando por adquirida a compreensão dos valores indicados na questão 3.1.1.

3.1.1. Conjeture qual deve ser o valor do limite de cada uma das sucessões $g(u_n)$ e $g(v_n)$, apresentando os argumentos em que se baseia.

limite de sucessão de $\lim_{n \to 2} g(u_n) = -\infty$

limite de sucessão de $\lim_{n \to 2} g(v_n) = +\infty$

3.1.2. Mostre, construindo um argumento com estrutura semelhante à da questão 2.1.2, que $\lim_{x \to 2} g(x)$ não existe.

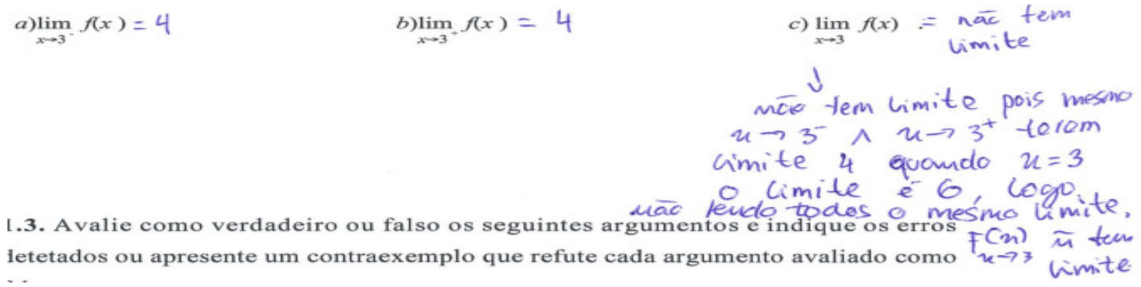
O limite de $\lim_{n \to 2} g(n)$ não existe! Pois nesta sucessão temos 2 limite, um ~~a~~ tende para $+\infty$ e outro para $-\infty$.

Figura 17. Resolução do aluno 1: questões 3.1.1 e 3.1.2 da tarefa 3.

A relação estabelecida entre 3.1.1 e 3.1.2 e, por conseguinte, a formulação do argumento exibido em 3.1.2 parecem padecer do mesmo tipo de problemas identificados no par A, não revelando por que razão a não existência de limite da função pode ser inferida a partir da constatação de duas sucessões com limites diferentes. Contudo, tenho de admitir que o aluno 1, tal como as alunas do par A, desenvolveram raciocínios de natureza relacional ganhando convicção por esquemas de natureza dedutiva.

Perante a não formulação de argumentos conjeturais (a maioria dos alunos apenas indicou os valores que achavam ser corretos) ou da ausência de elementos justificativos nos argumentos, foi necessário alertar os alunos, durante a fase de discussão coletiva da tarefa 2, para a diferença entre identificar, conjeturar e mostrar/provar. No mínimo, era importante que os alunos passassem a ver o processo de formulação de conjeturas como um processo análogo ao da constituição de hipóteses/teses, que não deve acontecer de forma arbitrária e deve ser propício ao teste e validação/refutação das hipóteses levantadas, até se atingir uma tese bem defendida.

Porém, na questão 1.2.1 da tarefa 3, o problema da ausência de argumentos conjeturais voltou a acontecer, apesar do preenchimento das tabelas e da indicação do valor dos limites ter sido efetuada por alguns grupos. Embora admita que, desta vez, a causa da não apresentação de argumentos também pudesse estar relacionada com a falta de tempo para terminar a tarefa, não posso deixar de supor que a maior parte dos alunos continuou a achar que não era necessário ou que não conseguia corresponder ao que era pretendido, tornando-se minimalista na resposta. A Figura 18 revela o argumento conjetural apresentado pelo par C.



a) $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 4$ b) $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 4$ c) $\lim_{x \to 3} f(x)$ = não tem limite

não tem limite pois mesmo $x \to 3^-$ ∧ $x \to 3^+$ terem limite 4 quando $x = 3$ o limite é 6, logo, não tendo todos o mesmo limite, $\lim_{x \to 3} f(x)$ ñ tem limite

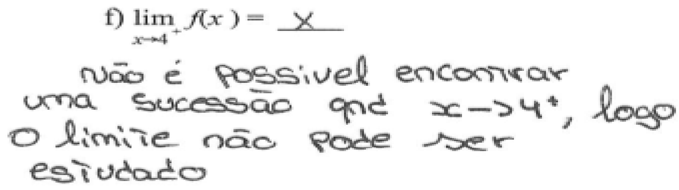
1.3. Avalie como verdadeiro ou falso os seguintes argumentos e indique os erros
letetados ou apresente um contraexemplo que refute cada argumento avaliado como

Figura 18. Resolução do par C: questão 1.2.1 da tarefa 3.

Apesar da justificação estar correta, segundo a estrutura argumentativa proposta pelo modelo elementar de Toulmin, este argumento não contém o elemento que podia desempenhar a função de justificação, apresentando apenas a observação dos dados, ou seja, que a tendência exibida pelas imagens de todas as aproximações dos valores de x ao valor 3 não é sempre a mesma. O elemento justificativo podia ser desempenhado por uma referência à definição de limite segundo Heine, ou por uma explicação que manifestasse a noção intuitiva de limite, porque neste momento as propriedades relacionadas com os limites laterais ainda não tinham sido sistematizadas. No entanto, admito que os elementos deste par formaram a sua convicção em esquemas de natureza dedutiva, já que a justificação denota a preocupação em verificar para onde tendem as imagens de todas as aproximações a $x = 3$ por valores do domínio, incluindo a partir de si próprio (sucessão constante).

Na questão 1.1 da tarefa "Limite num ponto aderente ao domínio de uma função real de variável real" (tarefa 3), os alunos tinham de indicar o valor de vários limites laterais e, quando não fosse possível indicar o limite requerido, deviam justificar por que não o podiam fazer (necessário na alínea f). A sugestão de utilização da estrutura argumentativa baseada no modelo de Toulmin também surgia no enunciado da tarefa. A totalidade dos grupos apresentou uma justificação escrita em linguagem natural e a maioria procurou formatá-la de acordo com a estrutura sugerida exceto os pares B, D, E, e I.

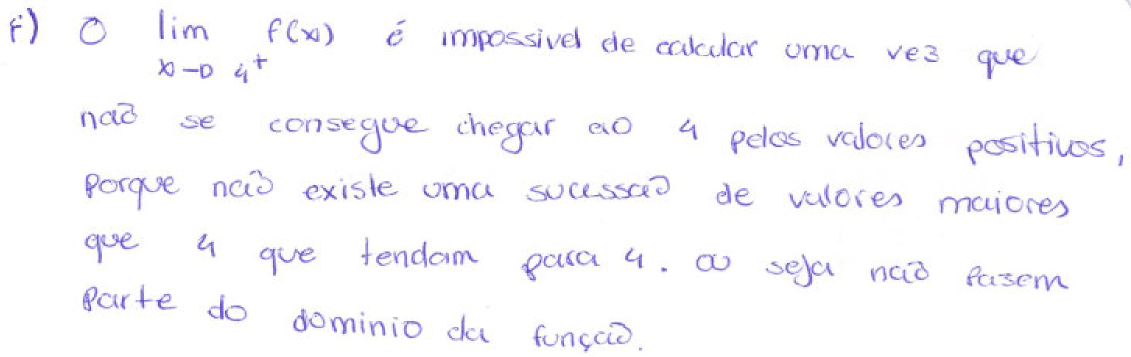
Apesar dos pares B e E não seguirem a estrutura sugerida, as suas justificações exibiam potencialidades argumentativas similares à da estrutura sugerida. Enquanto a justificação do par E procurava ser clara e sucinta em termos argumentativos, baseando-se na definição de ponto aderente (ver Figura 14), a sequência e articulação das razões disponibilizadas na justificação do par B (ver Figura 15) podiam estar melhor organizadas e a terminologia usada podia ser mais adequada (a aproximação ao valor 4, seja $x \to 4^+$ou $x \to 4^-$, é efetuada sempre por valores positivos e, naquele momento, isso já tinha sido salientado nas discussões em grande grupo).



f) $\lim_{x\to 4^+} f(x) =$ X

não é possivel encontrar uma sucessão qnd $x \to 4^+$, logo o limite não pode ser estudado

Figura 19. Resolução do par E: questão 1.1f) da tarefa 3.



f) O $\lim_{x\to 4^+} f(x)$ é impossivel de calcular uma vez que não se consegue chegar ao 4 pelos valores positivos, porque não existe uma sucessão de valores maiores que 4 que tendam para 4. ou seja não fazem parte do dominio da função.

Figura 20. Resolução do par B: questão 1.1f), tarefa 3.

A estrutura sugerida no enunciado teria conferido às ideias expostas na justificação do par B uma articulação mais vantajosa para a sua compreensão. Uma organização dos fundamentos apresentados nesta justificação, que possibilitasse a distinção entre os dados observados e a justificação propriamente dita, podia ser muito útil, no mínimo, por duas razões: (1) Para ajudar na compreensão e na distinção entre as condições ou características essenciais impostas pelas definições de ponto aderente e de limite segundo Heine. Não há problema de a conclusão aparecer logo no início do argumento (o limite é impossível), no entanto, a não distinção entre dados e justificação pode colaborar para os alunos não constituírem uma perspetiva sobre o significado do conceito que pretendessem usar para basear o raciocínio implícito no argumento. Por exemplo, se este par tivesse referido o domínio da função como correspondendo aos dados de onde partia, então ao acrescentar que não existia uma sucessão de valores do domínio que tendesse para 4 por valores superiores, estava a fundamentar a inexistência de limite com a impossibilidade de constituir 4 como ponto aderente ao domínio da função por valores superiores a 4, já que os pontos aderentes ao domínio de uma função tinham sido tratados nas primeiras duas aulas da intervenção letiva como pontos candidatos à existência de limite (neste caso só se poderia investigar o limite por valores inferiores ou iguais a 4), pois, nesta altura, ainda não tinha sido lecionada a definição de limite lateral. Por outro lado, se as alunas tivessem constituído a impossibilidade de encontrar uma sucessão de valores superiores a 4, por valores do domínio da função, como correspondendo aos dados de onde partiam, então podiam apresentar o enunciado da definição de limite segundo Heine para garantir/justificar a inexistência do limite em questão. (2) Formular argumentos claros e articulados contribui para criar condições propícias ao debate de ideias, ao convencimento dos outros e à compreensão, por analogia das estruturas, dos argumentos apresentados pelos outros. A justificação apresentada pelo par E, clara e sucinta, acaba por ser suficiente para cumprir o que era requerido, porém se os alunos criarem o hábito de formularem os seus argumentos justificativos apresentado dados, conclusão e justificação então isso também vai ajudá-los a compreender e construir os processos de prova e de demonstração.

É provável que a opção pela não utilização da sugestão pudesse ser sustentada por constrangimentos similares àqueles que foram demonstrados pelos grupos de alunos que, apesar das dificuldades, acabaram por aplicá-la nas justificações. Significa isto que a adoção da sugestão nem sempre foi concebida com sucesso. Ou seja, na construção das suas justificações, alguns grupos de alunos não conseguiram distinguir que informações deviam ser constituídas como os dados de onde partiam ou apresentadas como elementos justificativos da conclusão assumida no argumento. A Figura 16 mostra a justificação dada pelas alunas do par A, que procuraram adotar a sugestão mencionada.

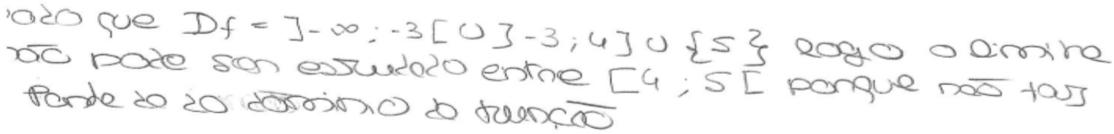

Dado que $Df =]-\infty; -3[\cup]-3; 4] \cup \{5\}$ logo o limite não pode ser estudado entre $[4; 5[$ porque não faz parte do do domínio da função

Figura 21. Resolução do par A: questão 1.1f) da tarefa 3.

Apesar das alunas terem sido capazes de compreender o processo de determinação do limite através da visualização gráfica, esta justificação pode servir para pôr a nu algumas dificuldades associadas à integração da argumentação nas atividades de aprendizagem que exigiam a mobilização de conteúdos da unidade didática. Nota-se que os elementos do grupo A não conseguiram estabelecer/entender uma diferença significativa entre a indicação dos dados de onde partiram e a apresentação de informações que pudessem justificar a passagem dos dados para a conclusão. A justificação do par A devia ter incluído uma referência à definição de limite segundo Heine ou, pelo menos, à de ponto aderente a um conjunto, de maneira a explicar por que razão o domínio pode influenciar na existência, ou não, de limite. Por outro lado, a conclusão do argumento também não está correta, pois, neste caso, é possível estudar o limite da função f no ponto de abcissa $x = 4$.

A justificação do par C (ver Figura 17) também merece ser usada para exemplificar alguns constrangimentos semelhantes.

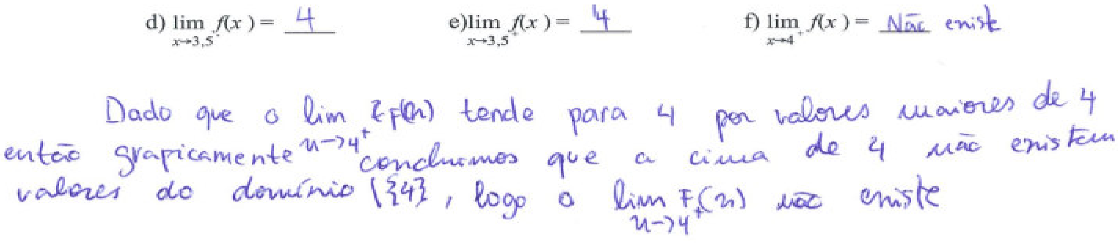


Figura 22. Resolução do par C: questão 1.1f) da tarefa 3.

Nesta justificação, o grupo C parece apresentar duas conclusões, no entanto, tal perceção pode derivar de uma má utilização do verbo concluir. O principal problema deste argumento reside na dificuldade em distinguir os dados da justificação. Ou seja, os alunos apresentam incorretamente o facto de se pretender determinar o limite da função $f(x)$ para valores superiores a 4 ($x \to 4^+$) como correspondendo aos dados a partir dos quais se chegou à conclusão de que "logo o $\lim_{x\to4^+} f(x)$ não existe" e como justificação utilizam o facto do D_f não estar definido para valores à direita de 4, embora esta observação, na realidade, correspondesse aos dados.

Se compararmos as justificações dos pares F (Figura 18) e G (Figura 19), as dificuldades dos alunos, em construir argumentos seguindo a estrutura sugerida, tornam-se ainda mais evidentes.

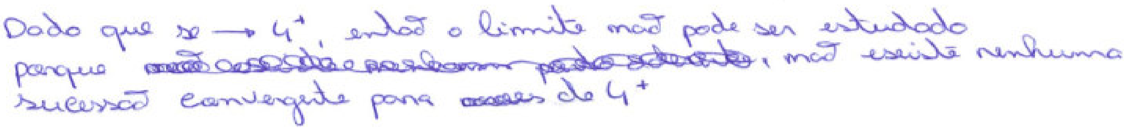


Figura 23. Resolução do par F: questão 1.1f) da tarefa 3.

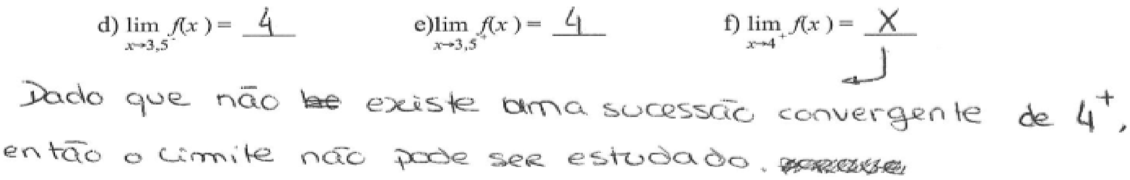
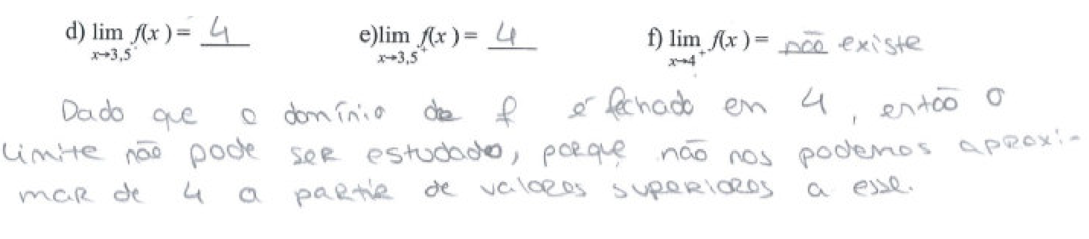


Figura 24. Resolução do par G: questão 1.1f) da tarefa 3.

Estes exemplos mostram a dificuldade em construir um argumento que revele os dados de onde partiram, a conclusão a que chegaram e em que basearam (justificaram) a passagem dos dados para a conclusão. Ao passo que o par F indicou a inexistência de qualquer sucessão convergente para 4^+como elemento justificativo da não existência de limite, é difícil de perceber se o par G utilizou o mesmo elemento para indicar os dados de onde partiu ou se utilizou a expressão "dado que" com o sentido de "porque" e, desta forma, também teria atribuído a mesma função argumentativa — como justificação — à inexistência de uma sucessão convergente para 4^+. No entanto, mesmo considerando que ambos os pares chegaram a uma justificação idêntica, isso não invalida as dificuldades em indicar os dados de onde partiram.

Se atendermos à seguinte transcrição de um excerto de áudio, no qual podemos perceber como é que os elementos do trio Z deliberaram até chegar à formulação do argumento justificativo (Figura 20) que se lhe segue, ficamos com uma noção do esforço despendido por estas alunas para encontrar uma coerência argumentativa entre os elementos observados e os conhecimentos mobilizados de maneira a respeitarem a estrutura sugerida no enunciado de forma convicta.

> **Z_2:** Só é aderente do $-\infty$ para o 4.
> **Z_1:** O limite de *f(x)*… Não, o que é que eu quero dizer… É aquilo do Zeine!?
> **Z_3:** Do Heine (risos!).
> **Z_1:** Sim… então dado *f(x)* não vai ser 4^+… Dado que este aqui não é ponto aderente a partir do $+\infty$, só é aderente a partir do $-\infty$.
> **Z_2:** Ou seja…
> **Z_1:** Só podíamos dar limite a isto se fosse um 4 vindo dos números negativos.
> **Z_3:** Do menos.
> **Z_1:** Da esquerda.
> (…) **Z_1:** Oh professor, nós já percebemos, mas para explicar é mais complicado.
> **Professor:** Primeiro fazem uma apreciação daquilo que viram, ou seja, dado que…
> **Z_1:** Pelo gráfico determinamos que não há limite…
> **Z_3:** Ou não pode ser estudado.
> **Professor:** Sim, é isso… é por aí.
> **Z_1:** Porque… agora só falta dizer em que nos baseamos.
> **Z_2:** De início sabemos que temos limite do $-\infty$ para o 4 mas não do 4 para lá.
> (…) **Z_3:** Então, dado que o domínio da função é fechado em 4.
> **Z_2:** Então o limite não pode ser estudado e aí é que explicamos.
> **Z_1:** Porque… imagina aquela cena do ponto de aderência… o limite vem do lado esquerdo, mas não vem do lado direito.
> (…) **Z_3:** Porque… não conseguimos aproximarmo-nos do ponto 4.
> **Z_1:** Porque não podemos aproximar por valores à sua direita.
> **Z_3:** Porque não podemos aproximar de 4 por valores superiores… ou á direita.


d) $\lim_{x\to 3,5^-} f(x) =$ 4 e) $\lim_{x\to 3,5^+} f(x) =$ 4 f) $\lim_{x\to 4^+} f(x) =$ não existe

Dado que o domínio de f é fechado em 4, então o limite não pode ser estudado, porque não nos podemos aproximar de 4 a partir de valores superiores a esse.

Figura 25. Resolução do trio Z: questão 1.1f) da tarefa 3.

Atendendo aos resultados, na apresentação das justificações da tarefa 3, a convicção de muitos grupos (A, Z, D, H, I, X, Y) foi fundamentada principalmente na intuição que emergiu da repetida aplicação do processo de dupla aproximação nas aulas precedentes, ou seja, por esquemas de cognição com base empírica. Apesar disso, alguns grupos tentaram elaborar as suas justificações a partir de aspetos que refletem, aproximadamente, as condições requeridas pela definição de limite segundo Heine ou pela definição de ponto aderente. Considero que, apesar da ausência de referências explícitas à definição de limite ou à de ponto aderente, as justificações destes grupos (F, G, B, E) acabam por indiciar que as justificações exibidas se basearam em esquemas de natureza dedutiva. Utilizei duas resoluções do par C porque, na questão 1.2.1, evidenciaram que conseguiam formar convicção em esquemas de cognição de natureza dedutiva, ao passo que na questão 1.1 f) já utilizaram esquemas de cognição de natureza empírica. O trio Z referiu, algumas vezes, a noção de ponto aderente, além de uma referência fugaz à de limite segundo Heine, todavia nunca evidenciaram que pretendiam estabelecer uma conexão entre a não existência de limite e as condições impostas pela definição de limite. Por exemplo, 4 não ser aderente ao domínio de f por valores à direita bastava para justificar a não existência de $\lim_{x\to 4^+} f(x)$.

Quanto à utilização da estrutura sugerida, ao contrário do que se observou na tarefa 2, os alunos começaram a tentar aplicá-la na realização da tarefa 3, apesar de se notar muita dificuldade nos alunos em distinguir a enunciação dos dados de onde se parte da enunciação de um elemento que permita justificar a passagem daquilo que se observa para aquilo que se conclui. Da tarefa 2 para a tarefa 3, é notória a melhoria em termos de coerência e de consistência dos argumentos apresentados e uma evolução nos conteúdos usados nas justificações, resultantes das atividades de aprendizagem. No que diz respeito às conjeturas e conclusões a que chegaram nas resoluções das tarefas, a maior parte dos alunos conseguiu apontar valores ou teses adequadas ao que era requerido na tarefa 3.

Realização de provas matemáticas

Na tarefa 3 e na tarefa "Operações com limites" (tarefa 4) os alunos eram convidados a realizar provas matemáticas mediante a apresentação de contraexemplos. Porém, nenhum grupo de alunos respondeu por escrito à questão 1.3 da tarefa 3, tendo a sua correção ficado para a discussão coletiva. Assim, a análise das produções escritas dos alunos, no que diz respeito a este aspeto, ficou restringida às resoluções da questão 3, da tarefa 4. Também não foi possível complementá-la nem com a gravação vídeo das aulas nem com a gravação áudio do trabalho autónomo de alguns alunos, porque a concretização da tarefa 4 só ocorreu depois da lecionação da unidade didática visada neste estudo, de forma a averiguar se os alunos continuaram a empregar algumas das práticas de argumentação trabalhadas durante a intervenção letiva.

Uma análise geral das resoluções apresentadas pelos diversos grupos permitiu constatar que alguns grupos continuaram a manifestar dificuldades em provar a falsidade de afirmações matemáticas mediante a apresentação de exemplos que, embora satisfazendo as condições estipuladas, contrariavam as alegações defendidas nas afirmações.

O trio Y e os pares B, D e I, em vez de usarem contraexemplos, apresentaram justificações de maneira a sustentar a alegada falsidade das afirmações que constavam nas alíneas a) e b), ou apenas indicaram o valor de verdade que julgavam adequado, sem acrescentar justificações. Todos os outros grupos encontraram contraexemplos com os quais procuravam provar, corretamente ou não, a falsidade daquelas afirmações. No que diz respeito à asserção da alínea d), apenas o trio Z e o par C tentaram apresentar contraexemplos de maneira a provar a sua falsidade. A comparação da argumentação do par B (Figura 26) com o contraexemplo utilizado pelo par C (Figura 27), na resolução da alínea a), pode ser útil para elucidar sobre as vantagens do último processo.

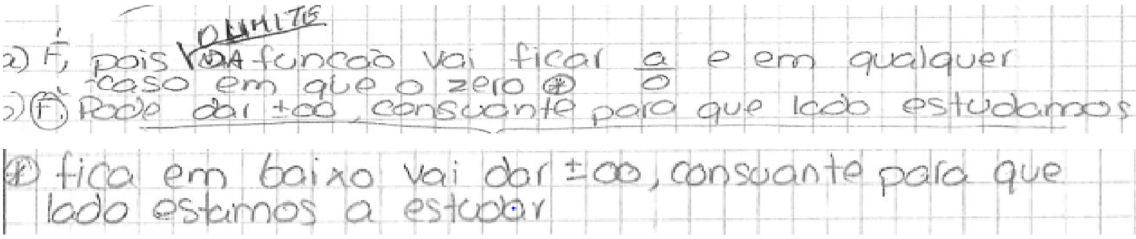

a) F, pois o limite da função vai ficar $\frac{a}{0}$ e em qualquer caso em que o zero (*)
b) (F) Pode dar ±∞, consoante para que lado estudamos
(*) fica em baixo vai dar ±∞, consoante para que lado estamos a estudar

Figura 26. Resolução do par B: questão 3a) e 3b) da tarefa 4.

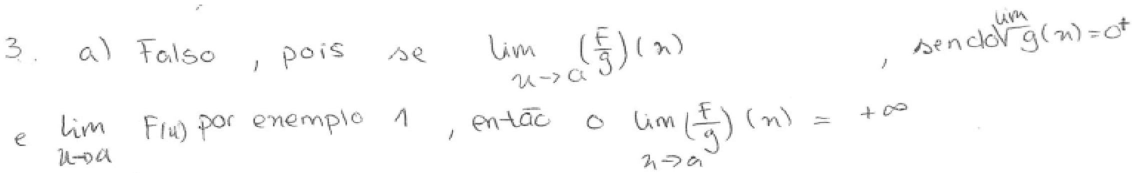

3. a) Falso, pois se $\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$, sendo $\lim g(x) = 0^+$ e $\lim_{x \to a} f(x)$ por exemplo 1, então o $\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = +\infty$

Figura 27. Resolução do par C: questão 3a) da tarefa 4.

Ao passo que o par B procurou explicar por que razão a afirmação da alínea a) podia ser considerada falsa, formulando um argumento que estabelecia a falsidade da frase de forma geral, o par C apenas utilizou um exemplo cujas características, ao mesmo tempo que cumpriam os requisitos impostos pela afirmação, contrariavam aquilo que na frase era alegado como verdadeiro.

Mas, como pode ser verificado pela resolução do trio E (Figura 28), o processo de prova por contraexemplos acarreta um problema: a eficácia da prova depende do contraexemplo apresentado.

a) falso, pois, por exemplo, a alínea d) do 1.1, em que $\lim_{x \to 1^-} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ tem limite.

b) falso, pois, por exemplo a alínea c) do 1.1, em que $\lim_{x \to +\infty} (f-g)(x)$ tem limite $-\infty$

Figura 28. Resolução do par E: questões 3a) e 3b) da tarefa 4.

O problema destes contraexemplos está relacionado com a sua representatividade. Na alínea a), a seleção da resolução 1.1d) foi ao encontro daquilo que havia sido previsto acontecer durante a produção da tarefa 4, que os alunos recorressem à resolução das questões precedentes para encontrar exemplos que satisfizessem os requisitos impostos pelas afirmações ao mesmo tempo que contradiziam o seu teor, podendo, desta forma, desempenhar a função de contraexemplo.

Contudo, a resolução, que podia ter fornecido um contraexemplo adequado à afirmação em causa na questão 3a), era a que correspondia à questão 1.2. O exemplo obtido com a resolução de 1.1d) não podia ser constituído como contraexemplo da afirmação contida em 3.a) porque esta referia-se ao limite quando $x \to a$ enquanto a resolução de 1.1.d) estava relacionada com o limite quando $x \to 1^-$, não obstante ambos os limites visarem o mesmo quociente entre as funções f e g. Algumas conclusões sobre o limite à esquerda de um determinado ponto podem ser utilizadas para tirar ilações sobre o limite no próprio ponto, mas nem todas as conclusões são diretamente correspondentes. Basta relembrar que a existência do limite lateral à esquerda de um ponto não garante a existência de limite no próprio ponto.

No que concerne à alínea 3b), a utilização da resolução de 1.1c) acarreta o mesmo tipo de problema, pois, embora os limites destas questões visem expressões idênticas, não podemos usar a função f porque, no caso da alínea 1.1c), esta função não corresponde a uma função polinomial (basta observar o seu gráfico) e a alínea 3.b) referia-se explicitamente a duas funções polinomiais. Nesta alínea, vários grupos (trio Z e pares A, C, F, G e H) utilizaram a mesma estratégia com diferentes níveis de eficácia. Nas figuras 29, 30 e 31, apresento os contraexemplos dos pares A, C e G.

Se $f(x) = 2x^2 + 5x + 3$ e $g(x) = 2x^2 + 3x + 1$

$\lim_{x \to +\infty} (f-g)(x) = \lim_{x \to +\infty} \cancel{2x^2} + 5x + 3 - \cancel{2x^2} - 3x - 1$

$= \lim_{x \to +\infty} (2x+2) = 2 \times (+\infty) + 2 = +\infty$

Figura 29. Resolução do par A: questão 3b) da tarefa 4.

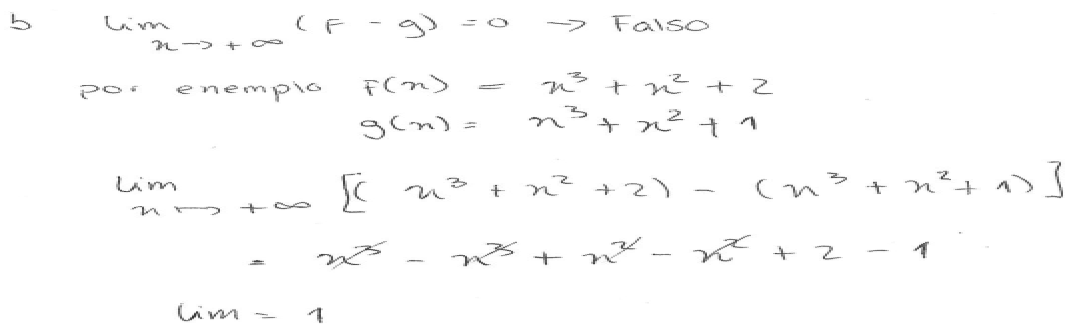


Figura 30. Resolução do par C: questão 3b) da tarefa 4.

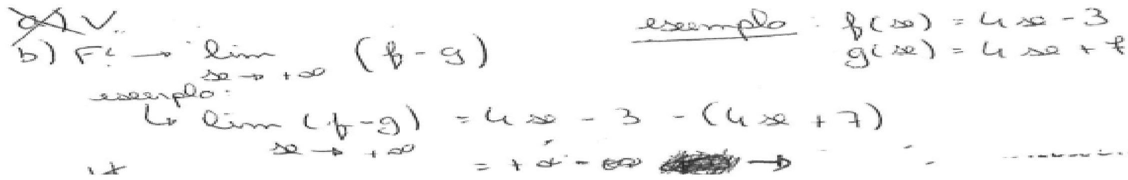


Figura 31. Resolução do par G: questão 3b) da tarefa 4.

Os pares pensaram em expressões adequadas a funções polinomiais de primeiro, segundo ou terceiro grau e, a partir dos exemplos por si criados, obtiveram limites que, apesar dos valores determinados terem sido diferentes de grupo para grupo, serviram para contradizer a afirmação da alínea 3b). Contudo, o par G não conseguiu fazer prova da conclusão assumida sobre o valor lógico da afirmação. De facto, se tivessem subtraído as expressões algébricas inventadas para as funções f e g o valor obtido teria sido -10, o que chegaria para contradizer a afirmação. Mas, o par G, em vez de -10, obteve $+\infty - \infty$ como resultado da operação de subtração entre os limites das duas funções, que corresponde a um valor indeterminado (indeterminação). Assim, os alunos precisavam, em primeiro lugar, de resolver a indeterminação e, só depois, podiam assumir a falsidade da afirmação, ou não (se o resultado obtido depois do levantamento da indeterminação fosse zero), o que acabou por não acontecer.

Na alínea 3d), somente os grupos C e Z tentaram encontrar contraexemplos para provar a falsidade da afirmação, mas só o trio Z alcançou tal desiderato com sucesso. A figura seguinte mostra três possibilidades de representar o gráfico de uma função com expressão ${}^{1}/_{f(x)}$, em que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

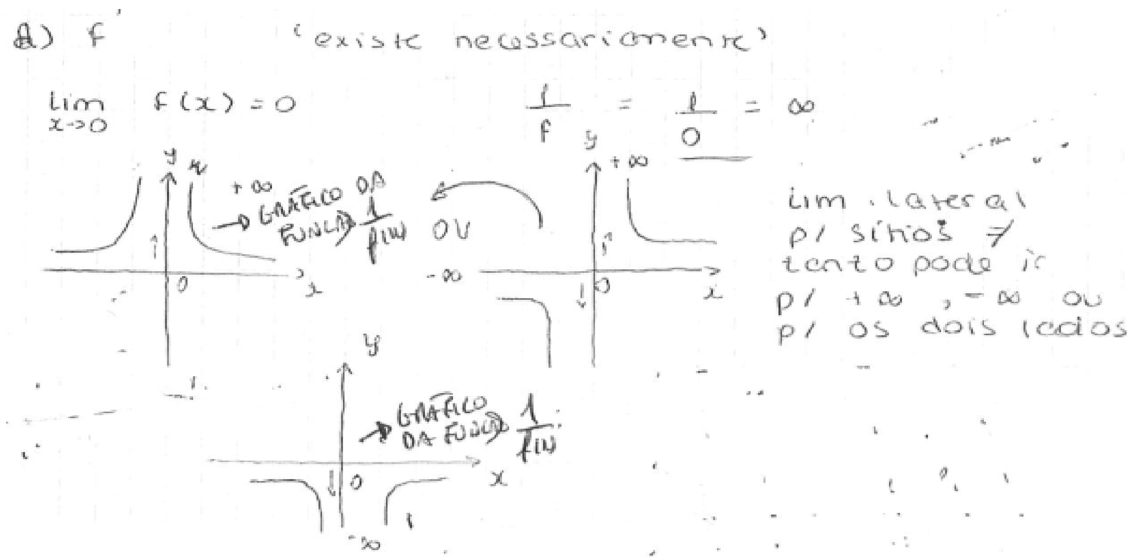


Figura 32. Resolução do trio Z: questão 3d) da tarefa 4.

Dois destes gráficos não contrariam a afirmação contida em 3.d), porém o terceiro gráfico representa uma situação na qual o $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{f(x)}$ não existe, continuando a considerar que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Como a afirmação da alínea 3.d) alegava que, sendo $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, o $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{f(x)}$ existia necessariamente, então o último exemplo apresentado pelo trio Z conseguia contrariar a condição de necessidade podendo, deste modo, ser constituído como um contraexemplo por intermédio do qual foi possível comprovar a falsidade da afirmação 3d).

Para além dos processos de prova caracterizados pela exibição de contraexemplos, com a função de verificar o valor lógico — falso — de algumas afirmações matemáticas, as tarefas de exploração realizadas ao longo da intervenção letiva também integraram outros processos de prova matemática. As respostas às questões 2.1 e 2.3 foram de certa maneira inesperadas pois sempre considerei mais complicado fazer prova de algo que cumpre os requisitos de uma definição, teorema ou propriedade, do que provar o contrário. Por outras palavras, antes de atribuir classificações às respostas da questão aula, supunha que ia obter argumentos melhor sistematizados e articulados na questão 2.3 (mostrar que não existia limite) do que na questão 2.1 (mostrar que existe limite), o que acabou por não se verificar. As explicações plausíveis deste facto podem estar relacionadas com o fator tempo, já que a questão 2.3 era a última da questão aula, e com o facto da minha crença na menor complexidade dos processos de prova pela adversativa poder ter influenciado a avaliação das respostas à questão 2.3 tornando-a mais rigorosa, apesar dos critérios de correção das duas questões serem idênticos. Assim, focalizando a atenção principalmente na pergunta 2.1 da questão aula, passo a analisar o processo argumentativo desenvolvido na realização de provas de tipo intelectual, que introduzem a necessidade de experienciar os conceitos envolvidos (Balacheff, 1988).

Na Figura 33, o aluno X_1 revelou dificuldade em fornecer todos os elementos relevantes para fazer prova da existência de limite e, ao mesmo tempo, conferir-lhe uma função explicativa sobre a existência de limite.

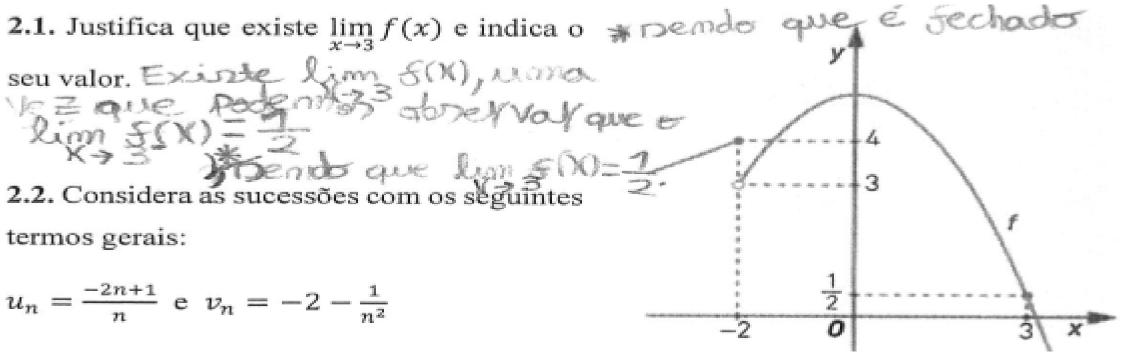


Figura 33. Resolução do aluno X_1: questão 2.1 da questão aula.

A ausência de qualquer alusão ao $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ não torna só o argumento incompleto como retira qualquer possibilidade de inferir sobre a existência de limite. Neste sentido, poder-se-ia pensar que o aluno não conseguiu usar a igualdade entre os limites laterais e a imagem $f(3)$ — daí o aluno achar importante realçar "sendo que é fechado", embora não indique explicitamente ao que se refere — para mostrar que existia $\lim_{x \to 3} f(x)$. Porém, suponho que a não referência do limite de *f(x)* quando $x \to 3^+$ está mais relacionada com a má identificação do limite. Penso que o aluno, a partir da leitura do gráfico, considerou que o valor deste limite seria $-\infty$ (como aconteceu com outros alunos), o que contrariava a existência de $\lim_{x \to 3} f(x)$. Contudo, como esta questão pedia para mostrar que existia limite e a maioria dos alunos sabe que, nestas situações, têm de chegar àquilo que tem de ser mostrado, o aluno X_1 preferiu não fazer qualquer referência ao limite de f à direita de 3. Esta hipótese advém de uma nota de campo realizada durante a questão aula, que contemplava uma dúvida, colocada por este aluno, sobre a utilização do verbo mostrar na elaboração de perguntas.

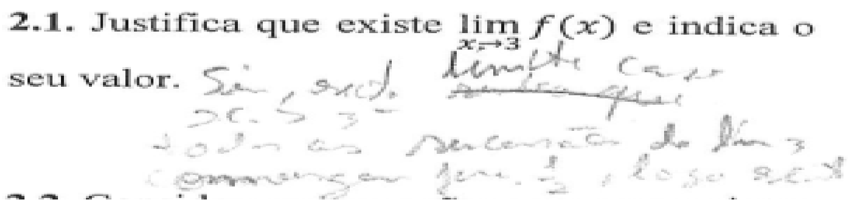


Figura 34. Resolução do aluno X_2: questão 2.1 da questão aula.

Na Figura 34, o aluno X_2 (E_1, C_2, Y_3) parecia estar ciente de como usar a definição de limite segundo Heine para provar a existência de limite. Mas, a linguagem utilizada na constituição do argumento e a ausência de um elemento essencial à definição acabaram por impedir que o argumento cumprisse com a função de assegurar a existência de limite. Bastava que o aluno tivesse acrescentado as palavras a negrito "… caso **as imagens pela função *f* de** todas as sucessões…" e fizesse alusão à definição segundo Heine, para que este argumento pudesse ser constituído como prova da existência de limite prestando-se à função de a comunicar à luz da definição.

Na Figura 35, de forma semelhante à resolução precedente, o aluno H_2 não indicou que **as imagens correspondentes** às aproximações dos objetos à esquerda e à direita do "número do domínio" ($x = 3$) **tendem para** o mesmo valor que a imagem deste objeto.

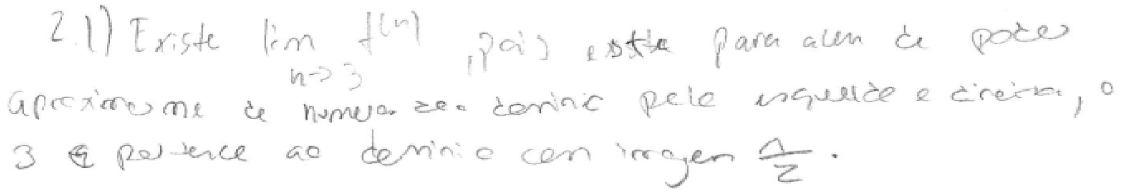


Figura 35. Resolução do aluno H_2: questão 2.1 da questão aula.

Segundo esta perspetiva, o aluno H_2 (Y_2, C_1, F_2, G_1) devia referir-se à sequência de igualdades que garante a existência de limite para um elemento do domínio da função *f(x)* ($\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$), de maneira a justificar a passagem dos dados observados para a conclusão de existência de limite, constituindo prova desta.

Na Figura 36, a aluna H_1 (B_1) apresentou todos os elementos relevantes para a prova da existência de limite, contudo estes elementos apenas foram enunciados sem se notar qualquer preocupação pela articulação ou sistematização de tais elementos.

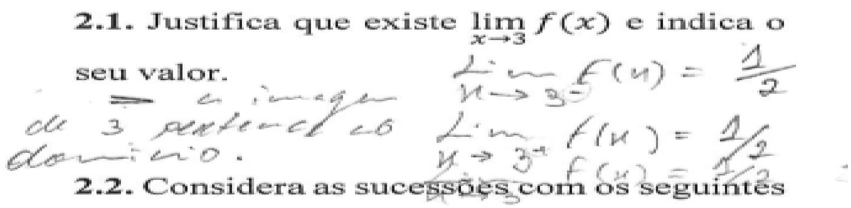


Figura 36. Resolução da aluna H_1: questão 2.1 da questão aula.

Desta forma, a prova foi constituída sem a intenção de convencer um auditório mais vasto, destinando-se apenas ao professor. Ou seja, o aluno descreveu os elementos observados graficamente, mas nem apresentou uma conclusão sobre a existência de limite nem referiu que propriedade, teorema ou definição usou para garantir a validade do raciocínio que lhe permitiu passar dos elementos descritos na resolução para a assunção de existência de limite.

Na Figura 37, é representada uma das resoluções do exercício 2.3 que, por ser muito semelhante à anterior, padece do mesmo tipo de problemas.

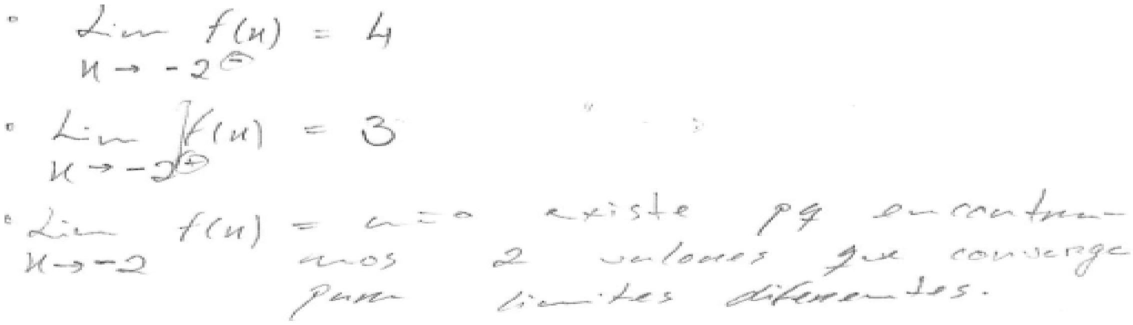


Figura 37. Resolução da aluna H_1: questão 2.3 da questão aula.

Todavia, nesta resolução, a prova da não existência de limite também acabou por ser influenciada pelo insuficiente domínio de terminologia apropriada. O que significará para a aluna H_1 dizer que "2 valores que convergem para limites diferentes"? Embora seja difícil de entender qual o real significado destas palavras, admito que o contexto da resolução permite criar uma compreensão acerca da sua intenção. Contudo, se os interlocutores desta resolução fossem outros alunos, tais palavras iriam certamente estimular muitas confusões e mal-entendidos. A resolução apresentada na Figura 38 é muito semelhante à anterior, mas, ao contrário daquelas, o aluno E_1 (E_2) verificou também o valor da imagem $f(-2)$.

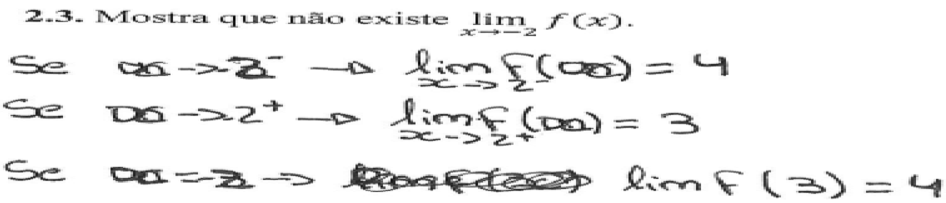


Figura 38. Resolução do aluno E_1: questão 2.3 da questão aula.

Contudo, na questão 2.3 não é necessário comparar este valor com o valor dos limites laterais, entretanto já determinados. Uma das vantagens do processo de prova acerca da não existência de limite está relacionada com o facto de não ser necessário verificar todas as condições, que precisam de ser garantidas quando se pretende provar a sua existência. Assim, se o aluno já tinha verificado que os limites laterais eram diferentes, para concluir que o limite não existia bastava-lhe garantir a validade da passagem dos dados para a conclusão usando como a referência a sequência de igualdades $\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^+} f(x) = f(-2)$.

A Figura 39 retrata novamente o exercício 2.1. A exposição desta resolução foi guardada para o final desta secção para exemplificar um processo de prova efetuado com a apresentação de um argumento baseado exclusivamente na definição de limite segundo Heine, que era o que se objetivava em termos matemáticos.

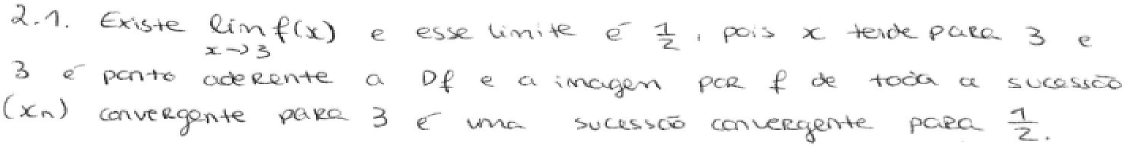

2.1. Existe $\lim_{x \to 3} f(x)$ e esse limite é $\frac{1}{2}$, pois x tende para 3 e 3 é ponto aderente a D_f e a imagem por f de toda a sucessão (x_n) convergente para 3 é uma sucessão convergente para $\frac{1}{2}$.

Figura 39. Resolução da aluna Z_3: questão 2.1 da questão aula.

Aliás, o único elemento que podia ser acrescentado pela aluna Z_3, de forma a tornar a prova mais sólida, era uma alusão à própria definição que permitiria validar a passagem dos elementos observados (as tendências dos termos das sucessões referidas e das imagens destes termos pela função *f*) para a conclusão de existência de limite.

A melhoria dos argumentos apresentados foi notória nas produções escritas relativas à questão aula e à tarefa 4. No que diz respeito à apresentação de contraexemplos como processo de prova matemática, mais de metade dos alunos conseguiu apresentar contraexemplos adequados na tarefa 4, embora na tarefa 3 tivessem demonstrado que não sabiam o que era pretendido quando o enunciado da tarefa requeria a sua apresentação. A maior parte dos alunos aceitou que os contraexemplos eram uma excelente forma de verificar a falsidade de uma afirmação, se bem que alguns alunos tivessem optado por apresentar justificações, e conseguiram encontrar exemplos cujas características colidiam com a pretensa generalidade das afirmações enunciadas, provando, assim, que não eram verdadeiras. Por outro lado, no que concerne aos processos de prova efetuados mediante a apresentação de argumentos que procuravam explicitar os raciocínios envolvidos em linguagem natural, verificou-se que os alunos começaram a valorizar as definições ou as propriedades decorrentes do conceito de limite lateral como apoio fundamental das suas justificações. Todavia, verificou-se que, salvo raras exceções, os alunos não utilizaram a estrutura argumentativa sugerida na realização das tarefas 2 e 3, denotando que não se sentiam confiantes no seu uso. Contraditoriamente, considero que o principal problema associado pelos alunos ao uso desta estrutura se relacionava precisamente com as características que eu pensei ser vantajoso explorar. Ou seja, ao passo que uma das principais vantagens da estrutura era permitir o reconhecimento da articulação entre os vários elementos que devem constituir um argumento, o constrangimento dos alunos estava relacionado com a identificação destes elementos e a função que deviam desempenhar no argumento.

Apesar da evolução já referida na formulação de argumentos e de se notar a referência às definições e propriedades na sua constituição, nos processos de prova a fundamentação dos argumentos em tais definições e propriedades devia ser explicitamente indicada e, nas suas resoluções, nota-se que esta é feita unicamente de forma implícita.

5.2. Conhecimentos prévios mobilizados pelos alunos nas argumentações

Esta secção foi dedicada à análise dos processos e conceitos relacionados com os domínios das funções reais de variável real e de variável natural (sucessões) que os alunos mobilizaram na construção dos seus argumentos. Foram apreciados os conhecimentos prévios à unidade letiva visada neste estudo de que os alunos se valeram para a construção dos argumentos apresentados ao longo da exploração das tarefas, analisando sobretudo a sua contribuição para a constituição de tais argumentos. Esta análise foi dividida em três subsecções referentes aos conhecimentos relacionados com sucessões, às representações tabelares e gráficas e às generalidades sobre funções, nas quais também presto atenção aos recursos que os alunos recorreram, nomeadamente no que diz respeito à máquina de calcular gráfica.

Conhecimentos relacionados com as sucessões

Os alunos dos grupos A, B, C, F e Y aplicaram em alguns momentos das tarefas (1, 2 e 3), assim como na questão aula, conhecimentos relacionados com o domínio curricular das sucessões. Por exemplo, na tarefa 2, os alunos do par C recorreram à determinação algébrica de limites para determinar o limite não só das sucessões u_n e v_n, mas também chegaram a fazê-lo para confirmar a conjetura sobre o limite da sucessão obtida por composição $f(u_n)$ — mobilizando conhecimentos sobre a composição de funções —, como pode ser visto nas figuras 40 e 41.

Figura 40. Resolução do par C: questão 1.1 da tarefa 2.

$$f(v_n)=\frac{2\left(2+\frac{1}{n}\right)^2-5\left(2+\frac{1}{n}\right)+2}{2+\frac{1}{n}-2}$$

2. Além das sucessões (u_n) e (v_n) da questão 1, considere a função real de variável real definida pela expressão algébrica:

$$f(x)=\frac{2x^2-5x+2}{x-2}$$

$$=\frac{2\left(4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-10-\frac{5}{n}+2}{\frac{1}{n}}=\frac{\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n}}{\frac{1}{n}}=\frac{\frac{2+3n}{n^2}}{\frac{1}{n}}=\frac{2n+3n^2}{n^2}$$

2.1. Complete a tabela seguinte:

n	u_n	$f(u_n)$		n	v_n	$f(v_n)$
1	3	5		1	−8	−17
5	2,2	3,4		5	1,6	2,2
10	2,1	3,2		10	1,9	2,8
50	2,02	3,04		50	1,996	2,992

$$\lim \frac{2n+3n^2}{n^2} = \lim \frac{2n}{n^2}+\frac{3n^2}{n^2} = 3$$

Figura 41. Resolução do par C: questão 2.1 da tarefa 2.

Também na tarefa 2, os elementos do par A procuraram utilizar a noção de sucessão limitada para justificar a formulação das conjeturas sobre os valores dos limites considerados na questão 2.1.1 A equiparação entre as noções de limite de uma sucessão e de sucessão limitada costuma surgir como resultado de confusões geradas no processo de aprendizagem das duas noções e na proximidade quer da grafia quer da fonética de ambos os termos. Deste modo, em vez de contribuir positivamente para a obtenção de uma justificação, a mobilização da noção de sucessão limitada acabou por fornecer indicações sobre a dificuldade em alcançar uma compreensão do conceito de limite que permitisse aos alunos a atribuição de um significado estável a tal conceito. Como pode ser observado na Figura 14, as alunas do par A concederam bastante destaque ao facto de ambas as sucessões serem limitadas, ao passo que a apreciação das tendências dos valores da tabela foi apresentada somente num dos cantos da resolução, transmitindo a ideia que não lhe atribuíram a importância merecida como justificação das conjeturas sobre o valor do limite das sucessões $f(u_n)$ e $f(v_n)$.

Representações tabelares e gráficas

A figura seguinte mostra que a tabela 1.1 foi preenchida de forma original pelo par C.

n	u_n		n	v_n
1	3		1	-8
5	$2+\frac{1}{5}$		5	1,6
10	$2+\frac{1}{10}$		10	1,9
50	$2+\frac{1}{50}$		50	$2-\frac{1}{250}$
100	$2+\frac{1}{100}$		100	$2-\frac{1}{1000}$
1000	$2+\frac{1}{1000}$		1000	$2-\frac{1}{10000}$
$n \to +\infty$	2		$n \to +\infty$	2

Figura 42. Resolução do par C: questão 1.1 da tarefa 2.

Os valores da coluna dos termos u_n e v_n foram escritos sob a forma de adições entre um valor constante e uma fração cujo valor vai decrescendo à medida que a variável n foi substituída pelos valores indicados na tabela.

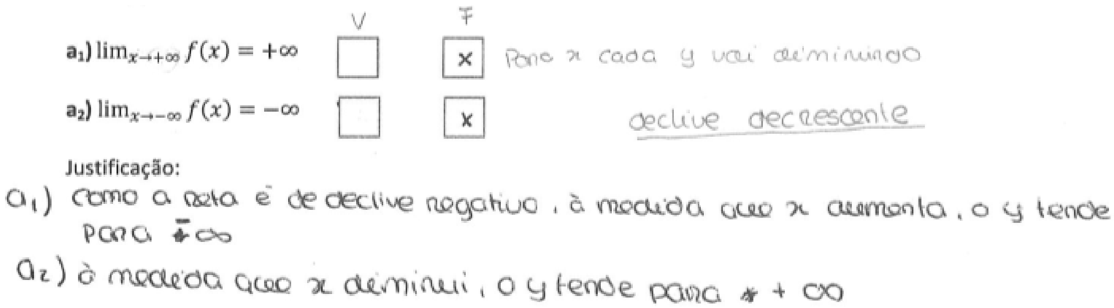
A transcrição do seguinte registo áudio permite perceber de que modo este par conseguiu utilizar os valores registados na tabela para determinar os limites das sucessões u_n e v_n.

> **Aluno C_1:** O limite é 2… da sucessão u_n é 2 porque dá $\frac{1}{+\infty}$ que vai dar 0, vai somar por 2 e vai dar 2.
>
> **Aluno C_2:** É fácil, é só substituir, imagina $\frac{1}{1} = 1$… 2 + 1 = 3… é só substituir (este aluno parece que estava simplesmente a preencher os valores na tabela).
>
> **Aluno C_1:** E como aqui é $+\infty$, $\frac{1}{+\infty}$ vai dar zero, mais 2 vai dar 2. [Isso] é o u_1(…). E é decrescente, faz sentido.
>
> (…) **Aluno C_1:** Mas agora temos de fazer estas contas!
>
> **Aluno C_2:** Mas já sabemos, agora vamos ter de repetir? Dá para fazer de cabeça.
>
> **Aluno C_1:** Faz tu de cabeça. Então e o 1000?
>
> **Aluno C_2:** Está aí 1000? Ah, pois está!
>
> **Aluno C_1:** Mas, mesmo assim não é muito difícil. É $\frac{1}{1000}$.
>
> **Aluno C_2:** Mas temos de fazer as continhas todas, para [mostrar] que a gente percebe isto.
>
> (…) **Profª Cooperante:** Também podem usar a calculadora, mete-se logo a tabela, lembram-se?
>
> **Aluno C_1:** Mas podíamos meter…
>
> **Profª Cooperante:** Mas assim não é nada visível… espera… mas assim pode ser. Pode ser porquê? Porque o aluno C_1 está a meter sempre 2 + fração… E esta fração é $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{10}$… seria melhor ter sempre o 2 para se perceber.

Contudo, esta transcrição também pode servir para salientar uma característica dos alunos da turma que, provavelmente, acabou por causar alguns obstáculos ao desenvolvimento das tarefas. Por vezes, notava-se que os alunos tinham receio de evidenciar dificuldades, que só avançavam nas tarefas até certo ponto porque achavam não ter capacidade para continuar ou porque não possuíam garantias sobre que conhecimentos mobilizar. Por exemplo, na tarefa 2, muitos alunos preferiram preencher as tabelas na sua totalidade — porque tinham percebido o que era para fazer — e só depois tentaram responder às outras questões, o que originou alguns problemas na exploração da tarefa porque, desta maneira, os alunos passaram a olhar para cada questão de forma compartimentada, impedindo de estabelecer certas relações necessárias à formulação de conjeturas.

Apesar deste problema, as características do gráfico de algumas funções — funções afins, funções polinomiais de grau dois e de grau três, funções racionais do tipo $y = a + \frac{b}{x-c}$ — foram alguns dos conhecimentos que vários alunos conseguiram mobilizar sem necessitar da confirmação do professor sobre a sua adequação aos desafios levantados pelas questões das tarefas de exploração.

A Figura 43 revela que os elementos do trio Y mobilizaram conhecimentos acerca do coeficiente diretor da função afim $f(x) = \frac{10-x}{2}$ percebendo, a partir da expressão algébrica da função, que este era negativo e, por isso, o gráfico da função correspondia a uma reta de declive negativo. Desta forma, conseguiram justificar os valores lógicos atribuídos na alínea inicial da questão 1.


V F

a₁) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ☐ ☒ Para x cada y vai diminuindo

a₂) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ☐ ☒ declive decrescente

Justificação:

a₁) como a reta é de declive negativo, à medida que x aumenta, o y tende para $-\infty$

a₂) à medida que x diminui, o y tende para $+\infty$

Figura 43. Resolução do trio Y: questão 1 da tarefa 1.

Na discussão coletiva, foi possível enfatizar as vantagens que o conhecimento das características dos gráficos de funções pode constituir para a identificação dos limites das funções respetivas.

> **Profª cooperante:** Quantos recorreram à calculadora gráfica para obter o gráfico? E os que não foram à máquina, não foram porquê? Olhem lá para a expressão da função, ela não é vossa conhecida?
>
> **Prof:** Qual é o tipo desta função?
>
> **Aluno C_2:** É afim.
>
> **Aluno (…):** É uma reta.
>
> **Prof:** Qual é o declive da reta?
>
> **Aluno C_2:** É 5.
>
> **Prof:** Não!
>
> **Profª Cooperante:** (surpreendida) Quanto é que é o declive?
>
> **Aluna Y_1:** -1.
>
> **Prof:** Só -1?
>
> **Aluna Y_1:** $-1x$.
>
> **Profª Cooperante:** -1 se não estivesse lá o denominador.
>
> **Aluna Y_1:** Sim.

Profª Cooperante: Então é $-\frac{1}{2}$.

(…) **Prof:** Já agora o que é que acontecia se a reta tivesse declive positivo?

Profª cooperante: Quanto seria o limite para $+\infty$?

Aluna G_1: Seria $+\infty$.

Prof: E o limite para $-\infty$?

Aluna G_1: Seria $-\infty$.

Mais à frente, nesta mesma discussão, os alunos voltaram a mobilizar conhecimentos sobre gráficos de funções polinomiais, mostrando que compreendiam que os limites no infinito das funções quadráticas seriam ambos $+\infty$, se a concavidade da parábola fosse voltada para cima (coeficiente diretor positivo), e seriam ambos negativos, se a concavidade da parábola fosse voltada para baixo (coeficiente diretor negativo), ou concordando que os limites no infinito de uma função cúbica são iguais aos de uma função afim, desde que ambas tenham coeficiente diretor com o mesmo sinal.

Na tarefa 1, e ainda com a finalidade de apresentarem justificações, os alunos também recorreram a conhecimentos sobre funções racionais, procurando determinar os limites no infinito de uma função racional, com a expressão algébrica $\frac{1-x}{x}$, a partir da determinação das assíntotas horizontais.

Prof: A função com a expressão $\frac{1-x}{x}$ pode ser $i(x)$?

Aluna Y_1: O limite não ia ser 1.

Prof: Ia ser quanto?

Aluna Y_1: Ia ser 0.

Prof: Porque é que dizes 0?

Aluna Y_1: Porque (…) não tem a, então ia ser $y = 0$.

Prof: Percebo a tua resposta. (…) mas tu estás a pensar numa expressão racional com uma expressão do tipo $y = a + \frac{b}{x-c}$, ou seja, estás a dizer que a expressão $\frac{1-x}{x}$ não tem a e como este valor indica a assíntota horizontal, então dizes que a assíntota seria $y = 0$, mas há uma coisa que não estás a ter em conta (…).

Aluno (…): A expressão não é a mesma.

Prof: Sim. Então esta expressão não é equivalente a esta. Como é que poderia transformar esta expressão para comparar com a outra? (…) Era preciso dividir…

Como não surgiram mais participações, fiz a divisão e, finalmente, chegou-se à conclusão que a assíntota afinal ia ser $y = -1$, e, por isso, a expressão não podia corresponder à função $i(x)$, pois os limites no infinito da expressão $\frac{1-x}{x}$ eram -1 e não 1 (ou 0, como argumentou a aluna).

Quando os alunos não conseguiam reconhecer características específicas nas expressões algébricas das funções, a maioria manifestou iniciativa e capacidade para utilizar a máquina de calcular gráfica de maneira a atingir o fim pretendido. Por exemplo, nas alíneas a) e b) da questão 2.2 da questão aula, a maior parte dos alunos preferiu utilizar a máquina de calcular gráfica para determinar o limite das sucessões u_n e v_n através da leitura do gráfico das sucessões, em vez de aplicarem o processo algébrico de determinação do limite de sucessões.

Porém, o recurso à máquina de calcular nem sempre esteve relacionado com as potencialidades gráficas que esta podia oferecer. Na questão aula, duas alunas (Z_1 e Z_2) surpreenderam nas opções tomadas porque, nas alíneas a) e b) da questão 2.2, não determinaram os limites requeridos nem através de processos algébricos nem da representação gráfica das sucessões em causa (ou do gráfico das funções de variável real que suportam os pontos das sucessões). A Figura 44 revela que a aluna Z_1 utilizou a máquina de calcular para obter tabelas de valores, a partir das quais tirou conclusões sobre a tendência dos termos das sucessões quando as ordens tendiam para $+\infty$ (a aluna Z_2 procedeu de forma semelhante).

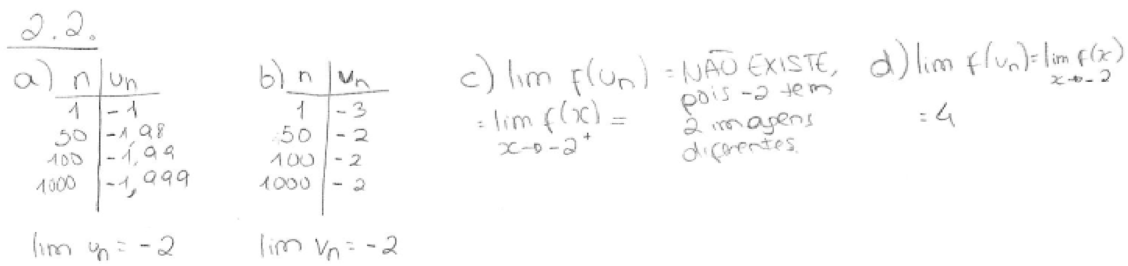


Figura 44. Resolução da aluna C_1: questão 2.2 da tarefa 2.

Na questão 1 da tarefa 1, os alunos tiveram de recorrer à calculadora com o propósito de obterem gráficos de funções que serviram para verificar se as afirmações enunciadas eram falsas ou verdadeiras. Depois, com o objetivo de apresentar justificações sobre os valores lógicos indicados em cada alínea, alguns alunos usaram esboços dos gráficos obtidos com a calculadora ou características dos gráficos dessas funções. Na Figura 45 aparecem duas representações gráficas usadas pelos pares B e D, respetivamente.

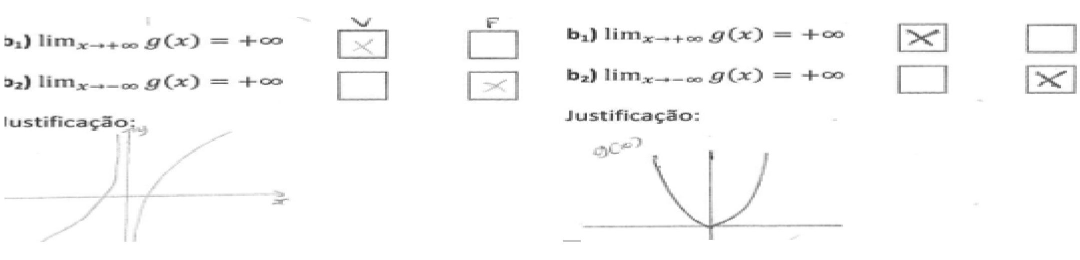


Figura 45. Resoluções do par B (esquerda) e do par D (direita): questão 1 da tarefa 1.

Ao passo que o esboço gráfico do par B correspondia à expressão da função *g(x)*, parece que o par D apenas representou graficamente o numerador da expressão (o vértice da parábola não está bem localizado). Isto significa que alguns alunos tiveram problemas iniciais em mobilizar as representações gráficas, ora porque não conseguiam recorrer às potencialidades da calculadora gráfica, ora porque não escreviam corretamente as expressões das funções. Esta foi uma dificuldade evidenciada por alguns grupos na primeira tarefa, mas deixou de ser tão visível na exploração das tarefas seguintes, indiciando que a utilização regular da calculadora gráfica contribuiu para o desenvolvimento da competência tecnológica dos alunos. Por outro lado, enquanto as alunas do par B conseguiram indicar corretamente o valor lógico correspondente aos limites referidos nas afirmações, o par D revelou não ter compreendido o processo de dupla aproximação que permitia obter os valores dos limites a partir da interpretação do gráfico. Um dos elementos do par D manteve as mesmas dificuldades na exploração das tarefas seguintes, embora o outro elemento tenha modificado a sua atitude e melhorado de forma significativa a compreensão intuitiva do conceito de limite.

Generalidades sobre funções reais de variável real

O domínio foi um dos conhecimentos mobilizados para justificar a não existência de limite ou a impossibilidade de estudar alguns limites laterais. Por exemplo, na questão 1.1f) da tarefa 3, o par A (e o par I) utilizou o domínio da função com esse fim, como pode ser comprovado pelo argumento exibido na Figura 21.

O argumento mostra que a não existência de $\lim_{x \to 4^+} f(x)$ está relacionado com o facto do domínio da função *f*(*x*) não estar definido para valores pertencentes ao intervalo $]4, 5[$. No entanto, a justificação apresentada acaba por ser um pouco pobre em termos matemáticos porque o domínio, por si só, não deve ser utilizado para garantir a não existência de limite, já que é possível determinar o limite para valores de *x* que não pertencem ao domínio.

Já os elementos do trio X, também na questão 1.1f) da tarefa 3, justificaram a não existência de limite da função f, quando $x \to 4^+$, baseando a sua resposta na continuidade da função (Figura 46), se bem que a continuidade de uma função num ponto do seu domínio nunca tinha sido abordada curricularmente.

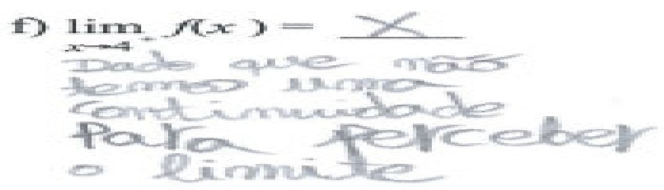


Figura 46. Resolução do trio X: questão 1.1f) da tarefa 3.

Embora a continuidade tenha sido mencionada vagamente durante a intervenção letiva, não surgiu a intenção de empreender uma aproximação à sua compreensão. Não estava previsto, portanto, que os alunos usassem o conceito de continuidade como justificação da não existência de limite. De qualquer modo, a sua utilização com este fim não era apropriada à situação em causa, porque, contrariamente ao indicado pelos alunos, a função *f* era contínua no ponto de abcissa 4.

Como comprovam as Figuras 29, 30 e 31, alguns grupos de alunos também demonstraram que conseguiam criar contraexemplos a partir da construção de expressões algébricas, correspondendo aos requisitos pretendidos na tarefa 4, já que mostraram não ter problemas em entender que as funções polinomiais são designadas a partir de expressões do tipo $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + \ a_nx^0, n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, a_2, \ldots\ , a_n \in \mathbb{R}$.

Outro conceito matemático, que alguns alunos mobilizaram de modo confuso, foi o conceito de imagem. Muitos alunos revelaram que, com maior ou menor dificuldade, conseguiam identificar intuitivamente o limite de uma função como um valor decorrente de um processo de dupla tendência no qual a tendência exibida pelas imagens acabava por ser determinante do seu valor. Porém, a possibilidade do valor do limite de uma função, quando $x \to a$, ter correspondência no valor da imagem $f(a)$, acabou por gerar alguns mal-entendidos que levaram alguns alunos a utilizar as imagens como prova ou justificação do valor do limite. A Figura 47 representa a resolução do par F, da questão 1.1.1 da tarefa 3, onde utilizaram a imagem 4 para provar que $\lim_{x \to -3} f(x) = 4$, apesar de $f(-3)$ não existir, pois $-3 \notin D_f$.

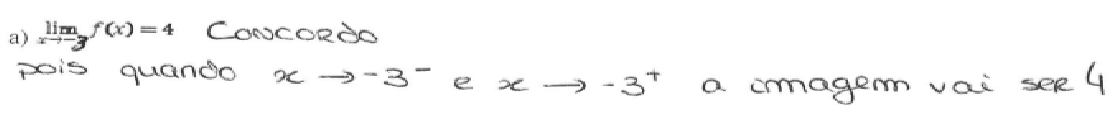
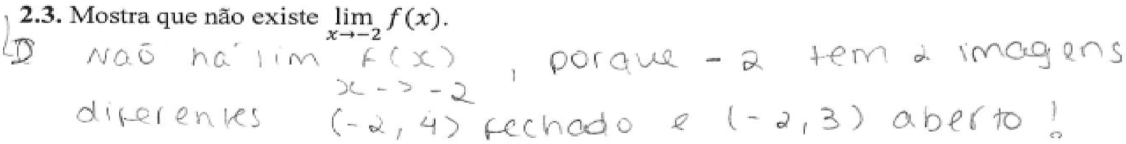


Figura 47. Resolução do par F: questão 1.1.1 da tarefa 3.

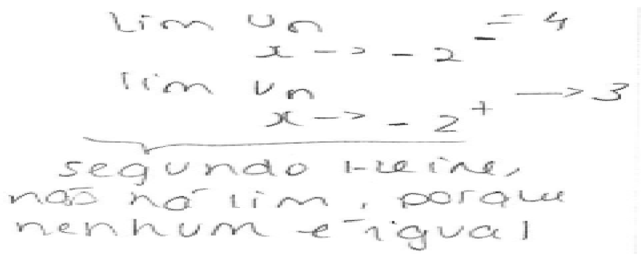
Na pergunta 2.3 da questão aula, alguns alunos também utilizaram incorretamente o conceito de imagem para apresentar verbalmente provas da não existência de limite (Sierpinska, 1985), como pode ser verificado, como exemplo, com a observação da Figura 48 que representa a resposta da aluna Z_1.


2.3. Mostra que não existe $\lim_{x \to -2} f(x)$.

Não há $\lim_{x \to -2} f(x)$, porque -2 tem 2 imagens diferentes $(-2, 4)$ fechado e $(-2, 3)$ aberto !

Figura 48. Resolução da aluna Z_1: questão 2.3 da questão aula.

No entanto, considero que, em ambas as situações, a dificuldade está mais relacionada com dificuldades de expressão (não utilização da terminologia correta) do que com uma má compreensão do conceito de limite ou, mais grave, de ambos os conceitos. Isto significa que os alunos normalmente revelaram dificuldades em recorrer à terminologia adequada para explicar os seus raciocínios e procedimentos. Quando a resolução das questões aula foram entregues aos alunos, confrontei a aluna cuja resposta surge na figura anterior indagando sobre qual era a imagem, por *f (x)*, do objeto -2. Ela olhou para o gráfico representado no enunciado e respondeu imediatamente que era 4. Então, depois de lhe mostrar a sua resposta na questão aula, perguntei qual a razão de ela ter respondido como aparece na Figura 48. Muito espontaneamente, disse que não existia limite e, por isso, "ia dar duas imagens diferentes", levando-me a inquirir se era correto dizer que ia dar duas imagens. Perante a sua insistência em afirmá-lo, questionei se um objeto podia ter duas imagens ou se era a tendência revelada pela função, quando me aproximava de -2, que ia dar a duas imagens distintas. Face à última questão, a aluna confirmou que era a última situação porque "a imagem mesmo é a bola fechada", mas que, na altura, não tinha encontrado outra forma de o dizer e que, por isso mesmo, tinha acrescentado na sua resposta o que aparece na Figura 49.


$\lim_{x \to -2^-} u_n = 4$

$\lim_{x \to -2^+} v_n \to 3$

segundo Heine, não há lim, porque nenhum é igual

Figura 49. Resolução da aluna Z_1: questão 2.3 da questão aula.

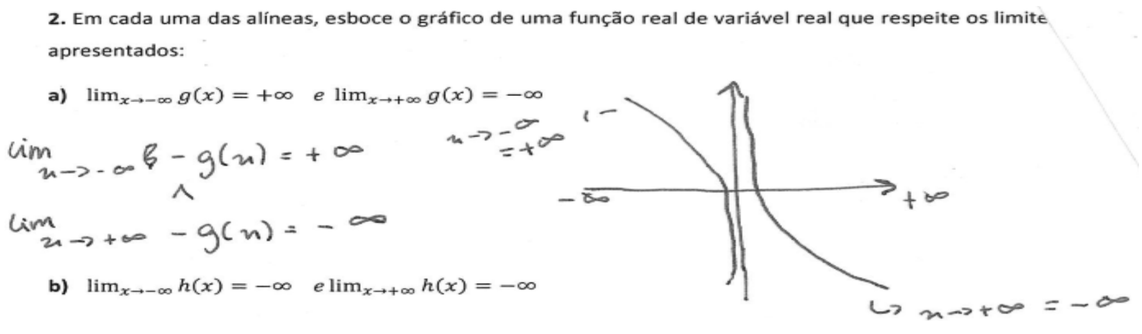
Contudo, também a explicação complementar apresentava incorreções, porque, não obstante a correta alusão à definição de limite segundo Heine, em vez de $\lim u_n$ e $\lim v_n$, a aluna devia ter escrito $\lim f(u_n)$ e $\lim f(v_n)$.

5.3. Aprendizagens relacionadas com o conceito de limite e dificuldades evidenciadas durante o processo de aprendizagem

A aprendizagem do conceito de limite não deve excluir a compreensão do seu significado matemático, exigindo que os alunos desempenhem um papel essencial na construção desse significado. De forma a descrever e tirar ilações sobre as aprendizagens efetuadas, bem como das dificuldades evidenciadas ao longo do processo de aprendizagem, a análise dos dados recolhidos incidiu nos conhecimentos sobre o conceito de limite, evidenciados na construção de argumentos. Assim, conhecimentos como o processo de dupla aproximação e a determinação de limites no infinito, a aplicação da noção de ponto aderente ao domínio de uma função, a referência à definição de limite segundo Heine e a determinação do limite num ponto, dos limites laterais e o reconhecimento das propriedades relativas aos limites laterais, foram tratados nesta secção de modo a tecer uma compreensão acerca das aprendizagens realizadas durante a unidade didática.

Noção intuitiva de limite: limites no infinito

A aprendizagem do conceito de limite passa pelo processo da sua determinação, o que pode acontecer antes da introdução da definição formal mediante a adoção de procedimentos algébricos ou de procedimentos gráficos. A natureza procetual do conceito de limite — retratada no capítulo destinado ao enquadramento teórico — inspirou a elaboração da primeira tarefa de exploração, que foi implementada durante a experiência de ensino supervisionada, levando-me a privilegiar os procedimentos gráficos em detrimento dos algébricos. Ao longo da exploração da tarefa 1, foi notória a capacidade de os alunos mobilizarem, intuitivamente, conceitos ainda não definidos, como o conceito de limite no infinito. A Figura 50, que contém uma resolução do par C, evidencia isso mesmo.

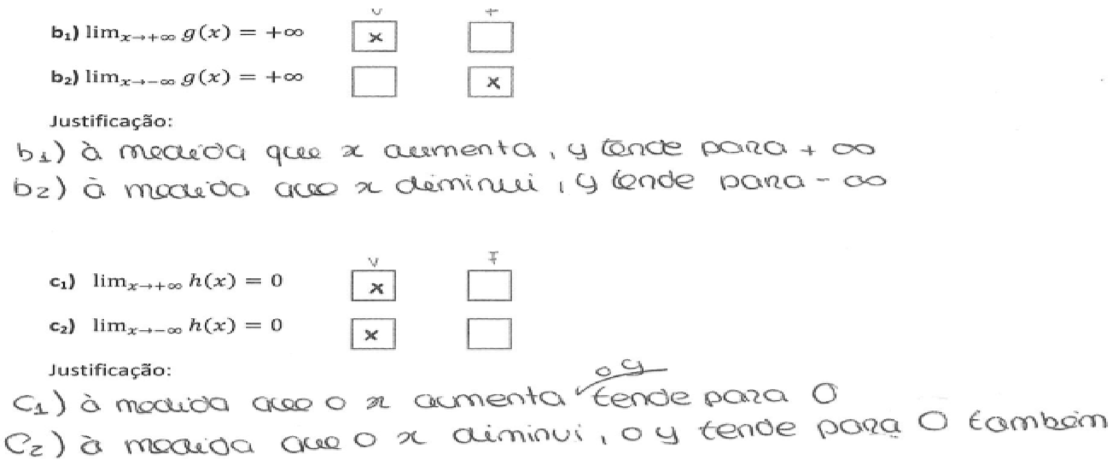

2. Em cada uma das alíneas, esboce o gráfico de uma função real de variável real que respeite os limite apresentados:

a) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$ $e \lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$

Figura 50. Resolução do par C: questão 2 da tarefa 1.

Ao passo que na questão 1 da tarefa 1era dada a expressão de uma função e a observação do seu gráfico era conseguida imediatamente através da máquina de calcular, a questão 2 exigia que os alunos empregassem a sua capacidade de visualização para obter mentalmente o gráfico de uma função (sem expressão da função não podiam recorrer à calculadora), que respeitasse os limites requeridos na questão 2, e o aplicassem, representando-a na folha da tarefa. Ao representar um esquema de setas juntamente com o gráfico, indicaram que eram capazes de ler e interpretar, no gráfico da função, a tendência dos valores das imagens de uma função quando os valores dos objetos tendiam/aproximavam-se para $-\infty$ ou para $+\infty$, confirmando graficamente os limites requeridos na questão 2. Fazendo corresponder ao processo de dupla aproximação a compreensão do conceito de limite, os alunos do par C mostraram que conseguiam perspetivar a vertente processual do conceito de limite e eram capazes de mobilizar o processo de dupla aproximação como método de determinação do limite de uma função. Nesta ótica, a solicitação de justificações na questão 1 da tarefa 1, ao mesmo tempo que serviu para trabalhar a capacidade argumentativa dos alunos, também contribuiu para a construção de uma primeira forma de entendimento, de base intuitiva, do conceito de limite, já que, em alguns casos, as justificações de atribuição do valor de verdade aos limites indicados no enunciado da tarefa faziam alusão ao processo de dupla aproximação. Por exemplo, as justificações do trio Y (Figura 51) revelam que as alunas que compunham este grupo estavam cientes de que a descrição da dupla tendência exibida pelos valore de x e pelos valores de y pode ser associada à compreensão do limite.



	V	F
$b_1)$ $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$	x	
$b_2)$ $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$		x

Justificação:

$b_1)$ à medida que x aumenta, y tende para $+\infty$

$b_2)$ à medida que x diminui, y tende para $-\infty$

	V	F
$c_1)$ $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$	x	
$c_2)$ $\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0$	x	

Justificação:

$c_1)$ à medida que o x aumenta o y tende para 0

$c_2)$ à medida que o x diminui, o y tende para 0 também

Figura 51. Resolução do trio Y: questão 1 da tarefa 1.

No entanto, recorrendo à resolução do par E, da mesma questão, pode verificar-se na Figura 52 que, em algumas situações, a aprendizagem deste processo acarretou algumas dificuldades. Se bem que a atribuição do valor de verdade estava correta, a justificação revelava que os alunos ou fizeram confusão na leitura gráfica dos procedimentos realizados, ou a interpretação da tendência dos valores de x e y estava a ser realizada de forma incorreta. De acordo com a segunda hipótese, a justificação deste grupo faria corresponder ao conceito de limite no infinito uma dupla leitura de valores, que obrigaria a interpretar o limite através da tendência revelada pelas duas extremidades da linha que representa o gráfico da função, ao passo que o processo de dupla tendência adequado à identificação do limite no infinito resulta da tendência revelada pela correspondência entre valores de x e y, ou seja, quando $x \to +\infty$, o limite da função corresponde à tendência revelada pelas imagens correspondentes aos valores de x (o mesmo quando $x \to -\infty$).

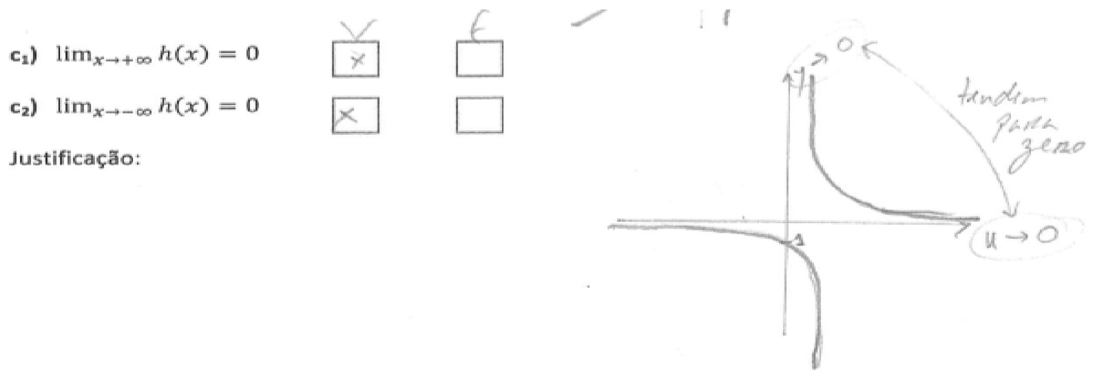


Figura 52. Resolução do par E: questão 1 da tarefa 1.

A partir do processo de dupla aproximação foi promovida uma aproximação ao conceito de limite com o propósito de estimular nos alunos uma compreensão intuitiva de limite. Ou seja, em vez de compreenderem o conceito de limite a partir do reconhecimento de propriedades e características derivadas por dedução de uma definição formal, ou a partir de procedimentos algébricos que estimulariam nos alunos uma compreensão de tipo instrumental do conceito de limite, os alunos foram estimulados a construir uma compreensão dinâmica/relacional sobre o conceito de limite que passava, quase exclusivamente, pela determinação da existência, ou não, de limite e identificação do respetivo valor, através da leitura de representações gráficas de funções e da interpretação do processo de dupla aproximação nessas representações. Contudo, a compreensão apenas intuitiva do conceito de limite pode acarretar um problema a médio e longo prazo para a sua aprendizagem: o esquecimento dos procedimentos envolvidos no processo.

Definição de limite de uma função segundo Heine e limites laterais

Se bem que, na tarefa 2, os alunos evidenciaram grande dificuldade em mobilizar os tópicos programáticos lecionados até então — definição de ponto aderente a um conjunto e definição de limite segundo Heine —, na exploração da tarefa 3, ainda durante a fase de trabalho autónomo, notei que os alunos começavam a revelar maior desenvoltura e perspicácia quando recorriam a tais tópicos, impressão que acabou por ser confirmada depois de ter lido as produções escritas com as resoluções da tarefa. Mas, isto não significa que as respostas dos alunos passaram a estar completamente corretas em termos matemáticos ou que os argumentos formulados passaram a constituir um exemplo de rigor e coerência. Significa antes que, ao contrário do que se passou aquando da realização da tarefa 2, os elementos da turma começavam a aceitar o desafio proposto pelas explorações, tentando construir as suas respostas sob a forma de argumentos e assumindo a iniciativa de incorporar nas atividades de aprendizagem as condições estipuladas pelas definições já mencionadas.

Por exemplo, nas resoluções da questão 1.1.1 da tarefa 3, na qual era requerido a apresentação de argumentos que justificassem a veracidade de algumas afirmações matemáticas, a maior parte dos grupos de alunos procurou criar argumentos que forneciam justificações sobre a sua concordância, ou discordância, com as afirmações.

A resolução das duas primeiras alíneas da questão 1.1.1, por parte do par C, revelam que os argumentos exibidos na Figura 53 foram sobretudo baseados na noção intuitiva de limite, denotando a influência da aprendizagem do processo gráfico de identificação do limite.

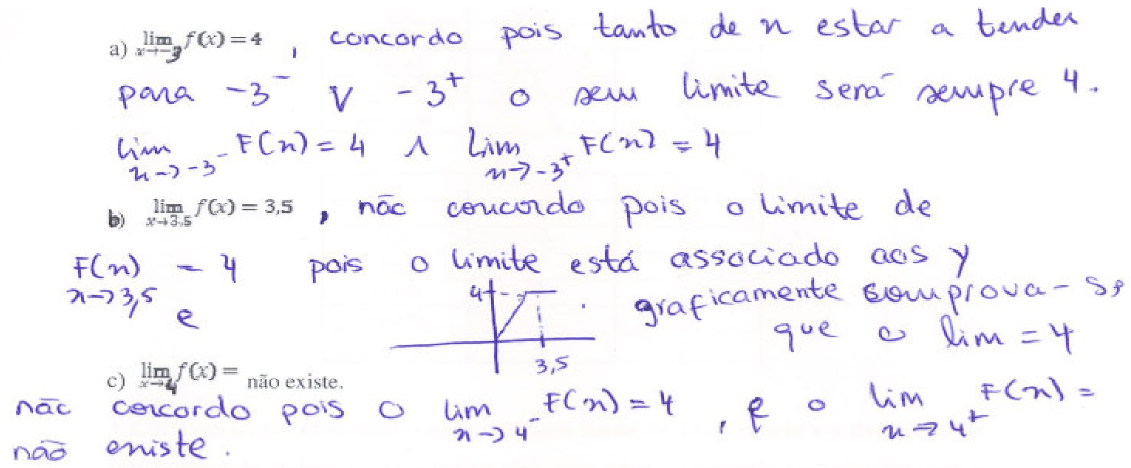
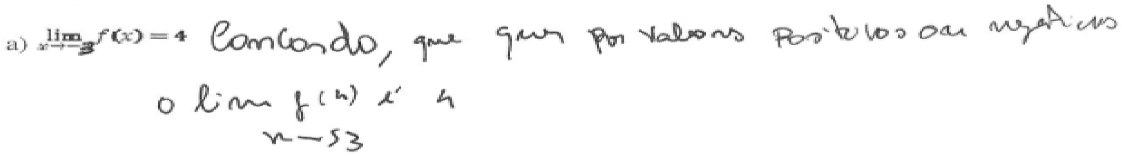


Figura 53. Resolução do par C: questão 1.1.1 da tarefa 3.

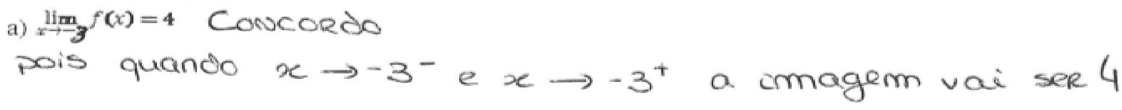
Porém, se focarmos a nossa atenção na alínea c), podemos inferir alguma influência da definição de limite segundo Heine na constituição do argumento apresentado. Os elementos do par C afirmaram não concordar com a não existência de limite, ou seja consideravam que existia $\lim_{x\to 4} f(x)$, alicerçando esta consideração no facto de existir $\lim_{x\to 4^-} f(x)$, não obstante a não existência de $\lim_{x\to 4^+} f(x)$. Como a definição de limite segundo Heine afirma que a existência de $\lim_{x\to 4} f(x)$ só é necessariamente garantida se a tendência das imagens, por *f*, de todas as sucessões que tendem para 4 por valores do domínio da função, seja a mesma, admito que o par C tenha constituído o seu argumento sob influência da definição de Heine, considerando que teria de existir limite porque as imagens de todas as aproximações de $x = 4$, feitas a partir de valores do domínio da função, vão exibir a mesma tendência, aproximando-se de 4.

Na primeira alínea da questão 1.1.1, tanto os elementos do par H como os do par F utilizaram sobretudo a noção intuitiva de limite para justificar a sua concordância com a afirmação, como pode ser observado nas Figuras 54 e 55.



a) $\lim_{x\to -3} f(x) = 4$ Concordo, que quer por valores positivos ou negativos o $\lim_{x\to -3} f(x)$ é 4

Figura 54. Resolução do par H: questão 1.1.1 da tarefa 3.

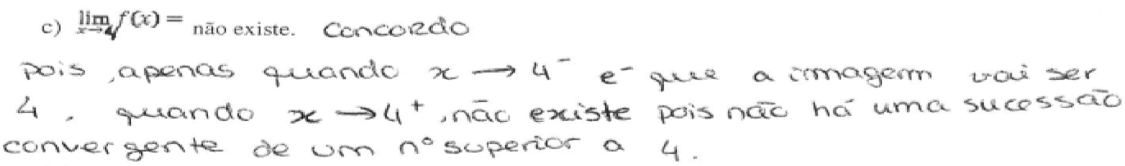


a) $\lim_{x\to -3} f(x) = 4$ Concordo pois quando $x \to -3^-$ e $x \to -3^+$ a imagem vai ser 4

Figura 55. Resolução do par F: questão 1.1.1 da tarefa 3.

É visível que a terminologia usada na justificação do par H denota um domínio ainda incipiente dos conceitos, já que a aproximação de -3 por valores do domínio da função *f* é sempre conseguida a partir de valores negativos, ora por valores inferiores (tratados por valores negativos), ora por valores superiores (tratados por valores positivos). Embora o argumento exibido na resolução do par F tenha sido estabelecido em torno de um erro (identificando o limite de *f* , quando $x \to -3$, com a imagem $f(-3)$), nota-se que as atividades de aprendizagem, empreendidas em torno das definições já mencionadas, surtiram efeitos consubstanciados na utilização da linguagem simbólica introduzida nas fases de sistematização de conceitos que finalizavam as discussões coletivas.

Se continuar a usar a resolução do par F, agora em relação à alínea c) da mesma questão, verifica-se que alguns alunos elaboraram as justificações baseando-se na definição de ponto aderente, como mostra a Figura 56.

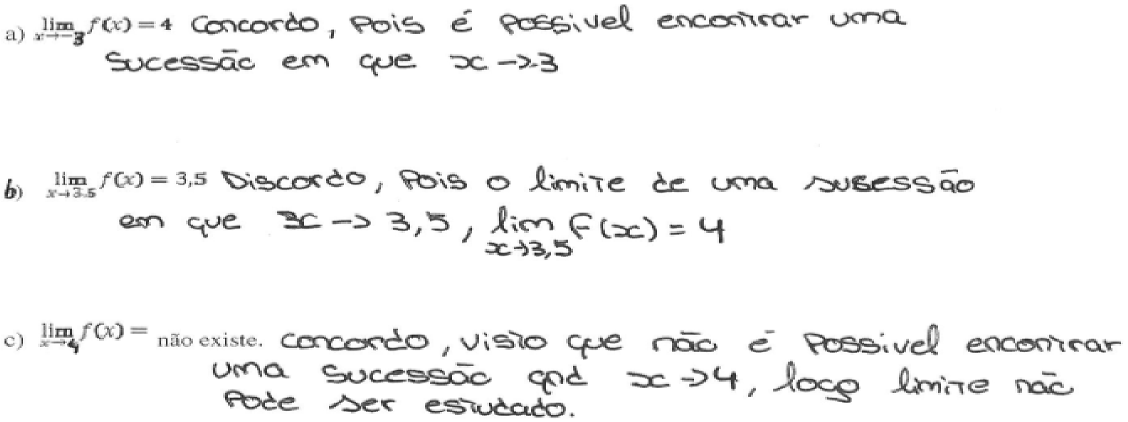


c) $\lim_{x\to 4} f(x) =$ não existe. Concordo pois, apenas quando $x \to 4^-$ é que a imagem vai ser 4. quando $x \to 4^+$, não existe pois não há uma sucessão convergente de um nº superior a 4.

Figura 56. Resolução do par F: questão 1.1.1 da tarefa 3.

Apesar de várias incorreções, incluindo a concordância com a afirmação, esta figura revela que as alunas do par F usaram a definição de ponto aderente para justificar corretamente que não podia ser determinado $\lim_{x \to 4^+} f(x)$. Contudo, isto não bastava para invalidar a existência de limite. Era necessário que as alunas também tivessem verificado que as imagens de todas as sucessões, que podiam aproximar-se de 4 por valores do domínio de f, tendiam para valores diferentes, o que não acontecia na realidade.

A Figura 57 representa a resolução do trio Y, que baseou todos os argumentos na definição de ponto de aderência.


a) $\lim_{x \to 3} f(x) = 4$ Concordo, Pois é possivel encontrar uma Sucessão em que x -> 3

b) $\lim_{x \to 3.5} f(x) = 3,5$ Discordo, Pois o limite de uma sucessão em que x -> 3,5, $\lim_{x \to 3,5} f(x) = 4$

c) $\lim_{x \to 4} f(x) =$ não existe. concordo, visto que não é Possivel encontrar uma sucessão qnd x -> 4, logo limite não Pode ser estudado.

Figura 57. Resolução do trio Y: questão 1.1.1 da tarefa 3.

Nesta resolução, a incorreta mobilização da definição de ponto aderente acabou por acarretar alguns problemas à aprendizagem da definição de limite segundo Heine, já que alguns alunos passaram a utilizar apenas a primeira, mesmo quando a sua utilização não se justificava. Foi necessário utilizar a discussão coletiva realizada em torno da exploração da tarefa 3 para procurar dissipar este conflito, gerado, em grande medida, pela aprendizagem consecutiva das duas definições.

A apresentação de argumentos, exigida durante a realização da questão aula, veio mostrar que grande parte dos elementos da turma conseguiu compreender a diferença entre as duas definições, começando a discernir quando devia aplicar a definição de Heine.

Na Figura 58 surgem duas resoluções que procuram expor o progresso na aprendizagem do conceito de limite: em cima, é apresentada uma resolução do trio Z obtida na tarefa 3 e, em baixo, é mostrada a resposta da aluna Z_3 obtida na questão aula.


a) $\lim_{x \to -3} f(x) = 4$ Sim, dado que -3 é um ponto de aderência tanto como dos valores da esquerda como dos

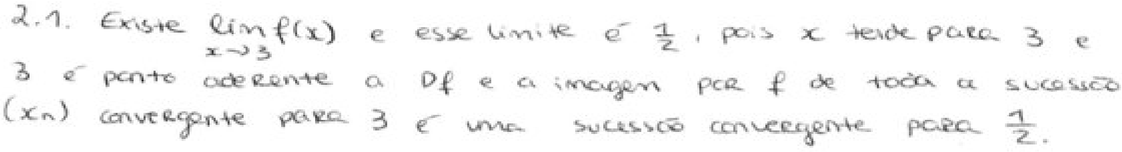

2.1. Existe $\lim_{x \to 3} f(x)$ e esse limite é $\frac{1}{2}$, pois x tende para 3 e 3 é ponto aderente a D_f e a imagem por f de toda a sucessão (x_n) convergente para 3 é uma sucessão convergente para $\frac{1}{2}$.

Figura 58. Resoluções do trio Z(em cima) e da aluna Z_3: questão 1.1.1 da tarefa 3 e questão 2.1 da questão aula.

Na parte de cima da figura, a justificação fornecida é construída em torno do conceito de aderência e admito que os elementos do grupo se tenham esquecido de completar o argumento, faltando acrescentar "… como dos **da direita**". Porém, este argumento justificativo não consegue ter o alcance supostamente pretendido pelas alunas do trio Z, pois não era requerido que se comentasse apenas a existência do limite quando $x \to -3$. Se fosse este o caso, o facto de -3 ser um ponto de aderência **ao domínio da função** também não servia para justificar a sua existência, no entanto podia ser utilizado para explicar por que fazia sentido averiguar se existia limite quando $x \to -3$.

Atendendo que o exercício 2.1 da questão aula era muito semelhante ao 1.1.1 da tarefa 3, já que, por palavras similares, requeria que se mostrasse a existência de limite quando $x \to 3$ e identificasse o valor desse limite, pode inferir-se que, pelo menos a aluna Z_3, compreendeu a diferença entre as definições de limite segundo Heine e a definição de ponto aderente, que havia sido um dos móbeis da discussão coletiva que aconteceu após a realização da tarefa 3 e antecedeu a questão aula. Aliás, o último argumento também mostra que a aluna conseguiu ter sucesso tanto na mobilização do conceito de aderência como no da definição, segundo Heine, do conceito de limite, o que acaba por ser sintomático sobre o progresso na aprendizagem de ambos os tópicos.

Não pretendo ser exaustivo com os exemplos a que poderia recorrer para evidenciar sinais da progressão nas aprendizagens, porque nem esta decorreu de forma linear nem forneceu sempre elementos explícitos ou fiáveis sobre o teor e a abrangência das transformações de significado ou de proficiência observados nos alunos. Embora a maior parte da turma tenha revelado, na questão aula, uma compreensão mais profunda e apurada (formal) do conceito de limite em termos matemáticos, não deve ser esquecido que a realização deste instrumento de avaliação não inibia a consulta das sistematizações de conceitos e procedimentos que resultaram das discussões coletivas.

Outro exemplo de utilização correta da definição de limite segundo Heine foi recolhido na questão aula produzida pelo aluno H_2 e é apresentado na Figura 59.

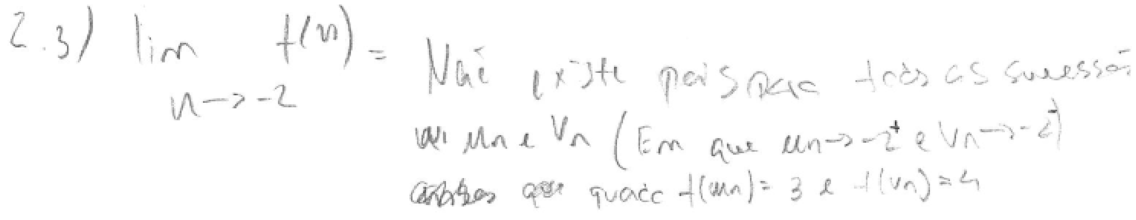
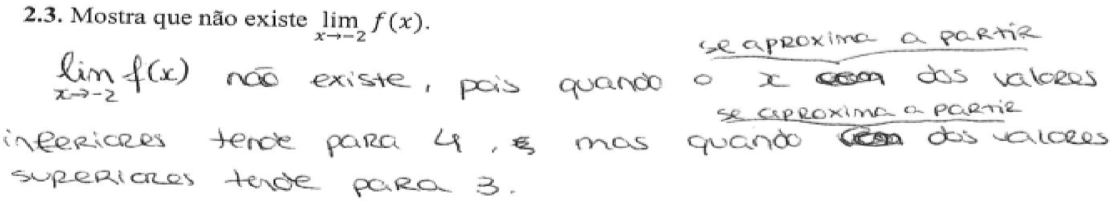

2.3) $\lim_{n \to -2} f(n) =$ Não existe pois para todas as sucessões u_n e v_n (Em que $u_n \to -2^+$ e $v_n \to -2^-$) obtemos que quando $f(u_n) = 3$ e $f(v_n) = 4$

Figura 59. Resolução do aluno H_2: questão 2.3 da questão aula.

O único problema do argumento apresentado pelo aluno H_2 (G_1, A_1) está relacionado com a ausência de uma referência à própria definição, que validaria a passagem dos factos observados para a conclusão de não existência de limite. Contudo, mais uma vez se denota a capacidade de aplicar a definição de limite de Heine, agora de forma a provar a não existência de limite.

Da definição de limite segundo Heine resultam várias formas mais simples de traduzir a existência de limite num ponto aderente ao domínio da função. A sequência de igualdades, $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ quando $a \in D_f$ ou $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$ quando $a \notin D_f$ mas a é ponto aderente ao D_f, obtida a partir do conceito de limite lateral, são exemplos disso mesmo. Na Figura 60, é representada uma das resoluções do exercício 2.3 da questão aula, que pode evidenciar uma tentativa de aplicação destas igualdades.


2.3. Mostra que não existe $\lim_{x \to -2} f(x)$.

$\lim_{x \to -2} f(x)$ não existe, pois quando o x se aproxima a partir dos valores inferiores tende para 4, mas quando se aproxima a partir dos valores superiores tende para 3.

Figura 60. Resolução da aluna Z_3: questão 2.3 da questão aula.

Neste caso, suponho que a aluna Z_3 esqueceu-se de referir que eram os valores das imagens quem tendia para 4 e para 3 e que, como $-2 \in D_f$, a sequência de igualdades $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = f(-2)$ podia garantir a existência de limite. Assim, a prova fornecida pela aluna garantiria a não existência de limite, tal como é assinalado na sua resolução. O facto da aluna, tal como aconteceu com boa parte da turma, não se preocupar em verificar qual seria o valor de $f(-2)$, leva-me a admitir que a determinação de existência de limite através da identificação dos limites laterais foi alcançada por grande parte da turma. As resoluções dos alunos C1 e G_1, exibidas nas figuras seguintes, mostram outras formas de determinar a existência de limite através da identificação dos limites laterais.

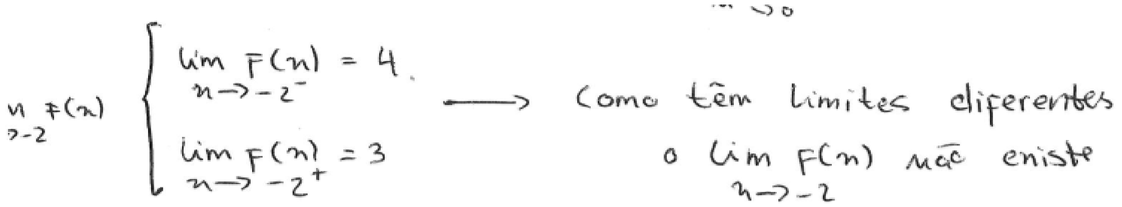
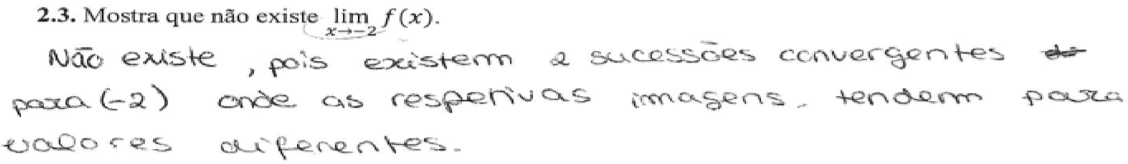

$$\lim_{x\to -2} f(x) \begin{cases} \lim_{x\to -2^-} f(x) = 4 \\ \lim_{x\to -2^+} f(x) = 3 \end{cases} \longrightarrow \text{Como têm limites diferentes o } \lim_{x\to -2} f(x) \text{ não existe}$$

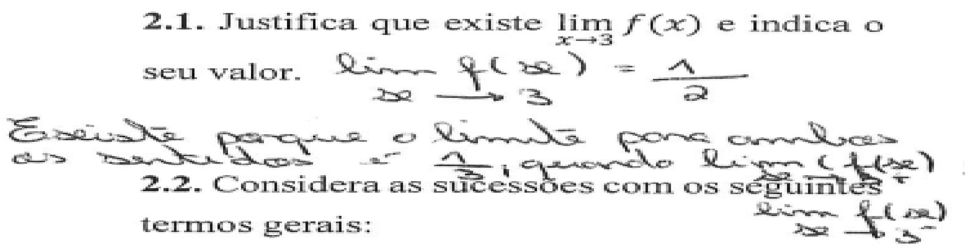
Figura 61. Resolução do aluno C_1: questão 2.3 da questão aula.


2.3. Mostra que não existe $\lim_{x\to -2} f(x)$.

Não existe, pois existem 2 sucessões convergentes ~~de~~ para (-2) onde as respetivas imagens tendem para valores diferentes.

Figura 62. Resolução da aluna G_1: questão 2.3 da questão aula.

No entanto, as produções escritas dos alunos também revelaram que, apesar dos progressos verificados na aprendizagem do conceito de limite, alguns continuaram a denotar dificuldades em recorrer à noção de limite lateral ou à definição de limite segundo Heine. Alguns alunos passaram a utilizar os limites laterais quando $x \to a$, mas continuavam sem reconhecer a necessidade de verificar o valor da imagem $f(a)$ quando $a \in D_f$, como mostra a figura seguinte.


2.1. Justifica que existe $\lim_{x\to 3} f(x)$ e indica o seu valor. $\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{1}{2}$

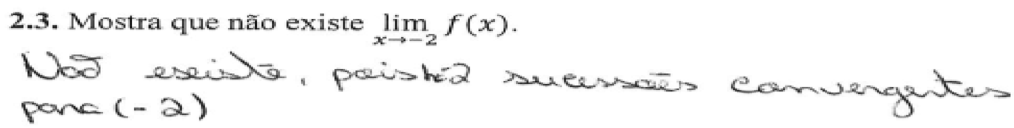
Existe porque o limite para ambos os sentidos é $\frac{1}{2}$, quando $\lim_{x\to 3^+} (f(x))$ $\lim_{x\to 3^-} f(x)$

2.2. Considera as sucessões com os seguintes termos gerais:

Figura 63. Resolução da aluna F_2: questão 2.1 da questão aula.

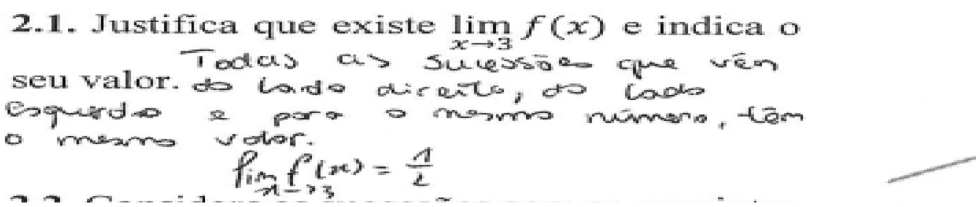
Outros alunos, além de assegurarem a igualdade dos limites laterais, verificavam sempre o valor de $f(a)$, mesmo quando não era necessário, como pode ser observado na Figura 38.

No que diz respeito à definição de limite segundo Heine, alguns alunos evidenciaram dificuldade em usar o texto da definição, como mostram as figuras seguintes.


2.3. Mostra que não existe $\lim_{x\to -2} f(x)$.

Não existe, pois há 2 sucessões convergentes para (- 2)

Figura 64. Resolução da aluna F_1: questão 2.3 da questão aula.



2.1. Justifica que existe $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ e indica o seu valor.

Todas as sucessões que vêm do lado direito, do lado esquerdo e para o mesmo número, têm o mesmo valor.

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \frac{1}{2}$

Figura 65. Resolução do aluno Y_3: questão 2.1 da questão aula.

Apesar das diferenças entre estas resoluções, penso que ambas as resoluções padecem do mesmo problema: não conseguem estabelecer correspondência entre o processo de dupla aproximação e o texto que consta no enunciado da definição segundo Heine. Em ambas as resoluções foram referidas várias sucessões que tendiam para um mesmo valor, apesar de considerar a resolução da Figura 65 mais completa, pois, em vez de duas, o aluno referiu todas as sucessões e não se esqueceu de fazer alusão à aproximação pela sucessão constante. No entanto, os dois alunos revelaram o mesmo erro, já que ambos não fazem qualquer alusão sobre a sucessão $(f(u_n))$. Ou seja, a definição segundo Heine apenas permite a tradução do processo de dupla aproximação, usado pelos alunos para determinar o limite de uma função, com a devida referência às sucessões (u_n), cujos termos pertencem ao domínio da função, e $(f(u_n))$: o limite da sucessão (u_n) corresponde à aproximação dos valores de x e a sucessão $(f(u_n))$ corresponde à aproximação dos valores de $f(x)$.

De forma geral, o progresso das aprendizagens relacionadas com os tópicos da unidade didática parece acompanhar a melhoria do desempenho dos alunos em termos argumentativos. Assim como os alunos vão revelando cada vez maior capacidade na formulação de argumentos, culminando com a apresentação de argumentos coerentes e consistentes, como são os argumentos da aluna Z_3, dos alunos do par C (apesar de ter usado mais vezes as resoluções de C_1), do aluno H_2 (corresponde ao aluno 1), da aluna G_1, o mesmo acontece em termos das aprendizagens e, de forma não surpreendente, os alunos assinalados também são aqueles que apresentam as aprendizagens mais consolidadas. Um pormenor curioso em relação a estes alunos: nem todos correspondem aos alunos que normalmente têm melhor aproveitamento em matemática.

Por outro lado, o progresso nas aprendizagens revela-se gradual e os tópicos mais complexos são aqueles que demoram mais tempo a ser mobilizados. Considero que a aprendizagem de uma noção intuitiva do conceito de limite foi atingida pela generalidade dos alunos, incluindo aqui a determinação de limites no infinito e de limite num ponto aderente ao domínio de uma função; embora a aprendizagem da definição de ponto aderente tivesse sido alcançada pela maioria dos alunos, admito que alguns tenham desenvolvido apenas uma noção intuitiva deste conceito; a aprendizagem do conceito de limite lateral e a sua aplicação na identificação de existência de limite também foi atingida por uma boa parte da turma, no entanto como houve pouco tempo para a desenvolver admito, pelas resoluções analisadas, que nem todos os alunos a atingiram; a aprendizagem da definição de limite segundo Heine era o tópico mais complexo da unidade e, coerentemente, também considero que este seja o tópico em relação ao qual menos alunos atingiram a sua compreensão, no entanto também admito que alguns alunos tenham conseguido estabelecer uma compreensão que tenha contribuído para a aproximação do conceito imagem do conceito definição.

Capítulo 6: Conclusões

Neste capítulo, apresento uma síntese do estudo realizado, fazendo alusão ao seu contexto, objetivo e questões de investigação, assim como das metodologias de recolha e análise de dados utilizada. Apresento, também, as conclusões principais deste estudo, respondendo às questões de investigação e comparando os resultados obtidos com os resultados de alguns estudos empíricos apresentados no capítulo do enquadramento teórico. A finalizar o capítulo, apresento uma reflexão final do trabalho realizado, tentando abordar as duas perspetivas resultantes do meu desempenho enquanto investigador e professor, no que concerne aos méritos das aprendizagens desenvolvidas e às limitações sentidas durante a sua elaboração.

6.1. Síntese do estudo

O estudo de cariz investigativo, desenvolvido no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada, teve por base a experiência letiva realizada na disciplina de Matemática, durante o ano letivo de 2018/2019, numa turma com 27 alunos (11 rapazes e 16 raparigas), do 11.º ano de escolaridade da Escola Secundária de Camões, em Lisboa.

A unidade didática "Limites segundo Heine de funções reais de variável real" incluída no domínio Funções Reais de Variável Real do Programa e Metas Curriculares Matemática A, 11.º ano do Ensino Secundário (MEC, 2014) foi lecionada por um período de 5 aulas de 90 minutos. O papel da argumentação nas aulas de matemática e o desenvolvimento da capacidade argumentativa dos alunos são dois tópicos muito focados na literatura dedicada à investigação em educação (Boavida, 2005; Pedemonte, 2002) e em muitos dos documentos orientadores do sistema educativo português, como é o caso do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (ME, 2017), onde é apontado que os alunos devem ser capazes de "pensar de modo abrangente e em profundidade, de forma lógica, observando, analisando informação, experiências ou ideias, argumentando com recurso a critérios implícitos ou explícitos, com vista à tomada de posição fundamentada" (ME, 2017, p.24). Assim, este estudo teve como objetivo compreender a argumentação matemática de alunos do 11.º ano na aprendizagem de conceitos e procedimentos envolvidos no estudo exploratório do limite de funções, na realização de uma sequência de tarefas de exploração propostas no decorrer da intervenção letiva. De modo a responder a este objetivo formulei as seguintes questões de investigação: (1) Como se caracterizam os processos argumentativos usados pelos alunos na resolução de tarefas exploratórias envolvendo o limite de funções? Que dificuldades evidenciam no uso desses processos?

(2) Que conhecimentos matemáticos, prévios à unidade didática, são mobilizados pelos alunos nas suas argumentações?

(3) Que aprendizagens, relacionadas com o limite de funções, são realizadas pelos alunos num contexto que integra a argumentação matemática? Que dificuldades revelam nessas aprendizagens?

O estudo desenvolvido durante a intervenção letiva teve por base o trabalho exploratório desenvolvido em torno de quatro tarefas. As aulas da intervenção letiva foram, por isso, dinamizadas de forma a comportar os seguintes momentos: (a) introdução das tarefas; (b) trabalho autónomo dos alunos, desenvolvido em grupos de pequena dimensão; e (c) discussão coletiva das tarefas realizadas. Por vezes, na introdução às tarefas, foi utilizado o software Geogebra para que os alunos compreendessem como podiam identificar o limite de funções através da interpretação do gráfico de funções. A aprendizagem das definições previstas no programa e metas curriculares (MEC, 2014) foi integrada nas atividades de argumentação (exceto a definição de limites no infinito) promovidas pelas tarefas de exploração e pelos momentos de discussão coletiva. O estudo seguiu uma metodologia qualitativa e interpretativa e a recolha de dados teve por base: (a) a observação participante das aulas lecionadas, com registos áudio e vídeo; (b) a recolha documental das produções escritas dos alunos nas tarefas realizadas em aula.

6.2. Conclusões do estudo

Como se caracterizam os processos argumentativos usado pelos alunos na resolução de tarefas exploratórias envolvendo o limite de funções? Que dificuldades evidenciam no uso desses processos?

A análise dos dados, realizada no capítulo anterior, permitiu concluir que os alunos revelavam diferente propensão para o exercício argumentativo conforme eram estimulados a desenvolver diversos processos argumentativos.

Sempre que foram solicitados para justificar as suas resoluções nas tarefas de exploração, os alunos evidenciaram que reconheciam o que era expectável fazer, apresentando, a acompanhar as resoluções, razões que procuravam explicar o porquê dos procedimentos, das atribuições de valor lógico e das conclusões utilizadas ou assumidas nas resoluções, ao mesmo tempo que procuravam convencer o professor da validade dos seus raciocínios.

Assim, no início da intervenção letiva, as justificações tanto consistiam na apresentação de gráficos ou de cálculos algébricos, que se prestavam mais à confirmação das resoluções do que à sua justificação, como na exibição de argumentos elaborados em linguagem natural ou mediante a introdução de esquemas que procuravam revelar como tinham sido interpretados os gráficos de funções. A justificação parecia, assim, ser aceite pela maioria dos alunos como um processo argumentativo cujo propósito principal consistia no fornecimento de razões com a intenção de promover a validade dos raciocínios e das convicções por detrás das resoluções, legitimando-as aos olhos do professor nos casos em que este ficasse convencido com as razões concedidas (Balacheff, 2000).

Porém, uma das dificuldades verificada em alguns alunos advinha precisamente do facto dos elementos da turma pensarem que as justificações se destinavam somente a convencer o docente (Harel & Sowder, 2007). Ao passo que alguns alunos revelavam ficar constrangidos ao ponto de desconfiarem da sua capacidade argumentativa e, por isso, ou apresentavam uma amálgama de razões, umas válidas, outras não, ou apresentavam motivos nunca explorados e, muito provavelmente, desadequados, outros alunos assumiam uma atitude demasiado displicente e acabavam por não apresentar justificações ou apresentavam-nas minimamente estruturadas e pouco rigorosas, porque pareciam considerar as resoluções como sendo autoevidentes para o professor, o que estava de acordo com algumas das expetativas criadas sobre as atividades de argumentação dos alunos (Krummheuer, 1995).

Para além destas dificuldades, os problemas evidenciados na realização das justificações pareciam estar relacionados com os seguintes fatores: complexidade inerente à compreensão do processo de identificação do limite recorrendo somente à visualização de gráficos de funções, bem como em relação à utilização de representações que procurem traduzir os procedimentos seguidos nesse processo (Sierpinska, 1985); mobilização de conhecimentos da unidade didática, nomeadamente das definições de limite e de ponto aderente, ou de conhecimentos prévios à intervenção letiva; carência de terminologia apropriada, visto que alguns alunos, apesar das tentativas, não conseguiam expressar em linguagem natural o processo pelo qual tinham alcançado o valor de limite, confirmando algumas das conclusões dos estudos empíricos de Cornu (1983).

É de salientar, no entanto, que, com o decorrer da intervenção letiva, grande parte dos elementos da turma passou a esforçar-se em apresentar as suas justificações sob a forma de argumentos expressos em linguagem natural, com o objetivo de convencer, não só o professor, mas também os colegas ou quem quer que tivesse conhecimentos suficientes para conseguir compreendê-los. Neste sentido, considero que a inclusão, no enunciado da segunda e terceira tarefas de exploração, de uma sugestão sobre a estrutura dos argumentos, baseada numa versão mais simples do modelo de argumentação de Toulmin apresentada em trabalhos de investigação por Pedemonte (2002), contribuiu para fomentar esta mudança de atitude. Embora tenham surgido algumas reações adversas e se tivesse notado, inicialmente, alguma inércia comportamental, a sua utilização acabou por incutir nos alunos a necessidade de organizar as informações e os raciocínios divulgados sob a forma de argumentos escritos em linguagem natural. Contudo, o outro objetivo, subjacente à inclusão de tal sugestão nas tarefas de exploração — ajudar os alunos a discernir que função devia caber a cada um dos elementos que se pretende incluir na argumentação —, acabou por ficar um pouco aquém, porque, perante as dificuldades levantadas pela identificação da função a atribuir aos elementos que compõem os argumentos, os alunos nunca se apropriaram da estrutura e só a utilizavam quando ela era explicitamente sugerida. Admito, agora, que talvez tivesse sido adequado trabalhar com os alunos alguns exemplos ou, devido ao tempo escasso para desenvolver o estudo, tivesse sido boa ideia fornecer aos alunos dois, ou três, exemplos escritos em situações que simulassem a necessidade do seu emprego, para servirem de referência ao desempenho dos alunos.

Outro processo argumentativo promovido e desenvolvido pela realização das tarefas de exploração foi a formulação e validação de conjeturas. Todavia, grande parte da turma demonstrou dificuldades em reconhecer a necessidade de apresentar, conjuntamente com a tese ou o resultado conjeturados, uma justificação que procurasse sustentar a sua validade (Mason, et al, 1984), indicando apenas, como se tratasse de uma conclusão definitiva, a conjetura sobre o valor de limite ou sobre a existência, ou não, de limite, mesmo depois das orientações fornecidas durante a monitorização do trabalho autónomo. Quando solicitados a formular conjeturas, foi notório que os alunos baseavam as suas teses conjeturais sobretudo na intuição, não conseguindo enunciar verbalmente os raciocínios que subjaziam implícitos na convicção acerca da sua validade (Harel & Sowder, 2007). A maior parte dos alunos da turma explorou corretamente alguns casos particulares, através da visualização de gráficos e subsequente preenchimento de tabelas, mas depois não conseguia compreender por que razão as suas intuições não podiam, desde logo, ser consideradas como verdadeiras. Admito que, para além de algumas dificuldades potenciadas pelo enunciado da tarefa, o principal problema adveio da pouca atenção prestada pelos alunos ao texto da definição de limite segundo Heine. No final da exploração da tarefa 2, muitos alunos ainda não tinham reparado que a definição aparecia escrita no enunciado da tarefa e que, no quadro branco, surgiam enunciadas, de forma simplificada, as condições da definição que tinham de ser respeitadas para garantir a existência de limite e permitir a identificação do respetivo valor. Isto gerou uma compreensão bastante insuficiente das condições a respeitar e das subtilezas que constituem o texto da definição, concorrendo a favor da perplexidade demonstrada pelos alunos quando, durante a discussão coletiva centrada em torno da apresentação de algumas resoluções, foram questionados com a intenção de validar as conjeturas, que eles davam como certas.

Também o processo de prova matemática foi constituído de forma a promover a construção de argumentos e o desenvolvimento de atividades de aprendizagem em torno da apresentação de argumentos e do debate sobre a sua validade. No que concerne à prova realizada mediante a utilização de contraexemplos, grande parte da turma desconhecia o significado do termo e não faziam ideia de como e com que objetivo este processo podia ser desenvolvido. A solicitação à utilização de contraexemplos ocorreu pela primeira vez na última questão da tarefa 3, mas nenhum aluno forneceu qualquer tipo de resolução que incluísse um contraexemplo obrigando à apresentação de alguns exemplos, durante a discussão coletiva, de maneira a que percebessem porque podiam ser constituídos como contraexemplos. Mais tarde, perante a mesma solicitação na tarefa 4, excetuando poucos grupos de alunos, todos os outros tentaram produzir este tipo de provas, e a maioria teve sucesso. Assim, parece que provar a falsidade de uma frase matemática, através da utilização de um contraexemplo, acabou por ser aceite pela maioria como um processo claro e acessível tanto para quem realizava a prova como para quem validava os argumentos apresentados. Ou seja, os alunos tiveram de ser familiarizados com os padrões de argumentação matemática considerados como legítimos para finalmente se sentirem aptos a utilizá-los (Hanna, 1996).

No entanto, outra conclusão relacionada com a questão de investigação visada nesta secção resulta precisamente desta última constatação. Um dos motivos que podia justificar a rápida adesão à utilização de contraexemplos, também podia ser derivado das dificuldades evidenciadas pelos alunos quando procuravam construir argumentos com o propósito de constituir prova. Ou seja, ao contrário dos contraexemplos, a explicitação e articulação de raciocínios que caracteriza a construção de argumentos exigia que os alunos conseguissem identificar e distinguir as funções a cumprir pelos diversos elementos racionais e observacionais que tinham de ser incluídos nos argumentos de maneira a identificar os dados de onde se parte, a conjetura/conclusão onde se chega e a justificação/garantia onde se basearam quando uma conclusão racional era inferida a partir de um conjunto de dados observados (Mason et al, 1984). Não obstante estas dificuldades, considero que muitos dos argumentos construídos ao longo da intervenção letiva podiam ser apontados como processos em que os alunos acabaram por produzir provas de tipo intelectual (Balacheff, 2000), enquanto a apresentação de contraexemplo podia ser encarada como um processo de prova por exemplo genérico, em que as limitações da abrangência de uma asserção genérica foram intuídas a partir das propriedades de um caso concreto.

Por outro lado, os alunos também revelaram reconhecer a diferença entre justificar e mostrar, apesar de evidenciarem pouco apreço pelas questões que solicitavam ambas as ações, principalmente pelas últimas, já que normalmente não exigiam procedimentos de cálculo direto nem possibilitavam a utilização de exemplos concretos, exigindo em alternativa a utilização de teoremas, propriedades, definições e processos de explicação mais formais (Balacheff, 2000). Ao longo do estudo, os alunos tiveram de recorrer a processos de prova que cumpriam as seguintes funções: (1) como explicação, ao construir a prova para explicar por que as asserções podiam ser verdadeira; (2) como verificação, ao determinar o valor de verdade de uma afirmação através da apresentação de contraexemplos; (3) como comunicação, já que a construção de argumentos fundamentados na definição de limite segundo Heine acaba por transmitir a sua relevância e elucidar os alunos sobre o seu significado (Harel & Sowder, 2007).

Que conhecimentos matemáticos, prévios à unidade didática, são mobilizados pelos alunos nas suas argumentações?

Com o decorrer da unidade de ensino, os alunos sentiram a necessidade de recorrer a um conjunto de conhecimentos pertencentes a diversos domínios matemáticos e aprendidos ao longo do seu percurso escolar. Estes conhecimentos foram mobilizados de maneira a responder a várias solicitações relacionadas com a promoção da aprendizagem de conceitos e processos que integravam a unidade de ensino e, por conseguinte, com os processos de argumentação introduzidos estrategicamente na promoção de tais aprendizagens de forma a compreender a capacidade dos alunos em recorrer à argumentação como atividade fomentadora das suas aprendizagens. Nesta secção, vou focalizar a atenção na mobilização de conhecimentos prévios à unidade de ensino e sobre as funções atribuídas a estes conhecimentos no que diz respeito ao desenvolvimento de atividades argumentativas, sobretudo na construção de argumentos.

A análise de dados foi dividida em três subsecções que procuravam ser representativas da globalidade de conhecimentos mobilizados: (1) conhecimentos relacionados com sucessões; (2) representações tabelares e gráficas; (3) generalidades de funções reais de variável real.

Sempre que os alunos recorreram aos seus conhecimentos sobre sucessões não evidenciaram dificuldades em fazê-lo, talvez por corresponderem a aprendizagens recentes que foram extensamente desenvolvidas ao longo do 2.º período letivo. Contudo, no início da unidade didática, mais especificamente durante a resolução da tarefa 1, o emprego de procedimentos algébricos com a finalidade de determinar o valor do limite chegou a ser contraproducente. A mobilização de tais procedimentos permitia, aos alunos, a identificação dos valores dos limites sem que precisassem de desenvolver a exploração do processo de determinação do limite a partir da visualização dos gráficos de funções de variável real, como era almejado na tarefa 1 de forma a desenvolver nos alunos uma noção intuitiva do conceito de limite baseada na compreensão do processo gráfico de dupla aproximação. A compreensão que cada aluno produz do conceito de limite vai depender da noção intuitiva de limite construída mentalmente (Tall, 1992) e, por isso, era muito importante que os alunos fossem orientados de maneira a abdicarem voluntariamente do processo algébrico evitando o surgimento de conflitos cognitivos gerados por abordagens que partem de representações diferentes do conceito (Fischbein, 1994).

No entanto, apesar da tendência inicial ter sido agregadora de vários elementos da turma, apenas um par de alunos manteve esta opção até ao final da questão 1 mas, durante a realização das tarefas seguintes, todos os alunos passaram a utilizar este conhecimento apenas para confirmar os valores dos limites identificados graficamente ou conjeturados através da tendência verificada em tabelas de valores.

Também o conceito de sucessão limitada chegou a ser mobilizado de forma a ser constituído como elemento justificativo de argumentos conjeturais. No entanto, apenas um grupo manteve essa intenção até à entrega das resoluções da tarefa 2, já que todos os outros grupos, ainda durante a fase de trabalho autónomo, começaram a perceber a confusão em que estavam a incorrer (Sierpinska, 1985).

Os dados analisados na subsecção relativa às representações gráficas e tabelares mostraram que os alunos utilizavam conhecimentos relacionados com a manipulação de ambas as representações de maneira a poderem constituir dados para elaborarem os seus argumentos. Mas, da análise destes dados também verifiquei que o mero preenchimento de tabelas com valores chegou a favorecer a construção de argumentos, permitindo a formulação de conjeturas mais rapidamente do que era suposto. Aliás, o trio Z chegou mesmo a utilizar as tabelas para alcançar conclusões, apesar deste não ser um procedimento fiável. Para além disso, a tendência evidenciada pela variação de valores também serviu para constituir elementos justificativos nos argumentos criados por alguns grupos de alunos.

Por outro lado, a visualização de representações gráficas foi muito utilizada para obter dados que permitiam a identificação da existência, ou não, de limite e do respetivo valor a partir do processo de dupla aproximação (já descrito anteriormente) permitindo aos alunos o estabelecimento de relações que contribuíram para a compreensão do conceito de limite (Demana & Waits, 1992). Não se verificaram grandes dificuldades da parte dos alunos em representar gráficos, apesar de, nalgumas situações os alunos terem formulado conjeturas incorretas baseadas na convicção externa (Harel & Sowder, 2007) de que a calculadora apresenta sempre gráficos corretos.

Por outro lado, as tarefas de exploração também estimularam os alunos a revisitar, a partir do conhecimento da expressão algébrica de funções, algumas das características associadas aos gráficos de certas classes de funções, como a monotonia decrescente de funções afins cujo coeficiente do termo de grau um é negativo (declive negativo), ou a concavidade voltada para cima de funções quadráticas com coeficiente diretor positivo (termo de grau dois), ou as assintotas horizontais de funções racionais e a expressão $y = a + \frac{b}{x-c}$. Considero que o reconhecimento destas características foi bastante importante porque, ao ter sido utilizado de maneira a obter justificações acerca da determinação do limite das funções, permitiu aprofundar o estabelecimento de conexões entre representações de tipo algébrico e representações gráficas contribuindo para a construção do significado matemático do conceito de limite (Duval, 2006).

Também alguns conhecimentos gerais sobre funções, tais como o domínio, a noção de imagem e o reconhecimento de expressões algébricas, contribuíram para a obtenção de justificações e para a constituição de processos de prova através da apresentação de contraexemplos.

Embora a mobilização das expressões algébricas de funções polinomiais não tivesse acarretado grandes dificuldades na produção de prova por contraexemplos — o único problema adveio da obtenção de indeterminações do tipo $+\infty - \infty$ e $\frac{\infty}{\infty}$ (Sierpinska, 1985;

Cornu, 1983) —, o mesmo já não pode ser dito no que concerne à noção de imagem. Se bem que os alunos não evidenciaram dificuldades em determinar o valor das imagens, o termo imagem foi muitas vezes utilizado nas suas argumentações com o sentido de limite. Ou seja, apesar de parecer que os alunos utilizavam o conceito de imagem com dois significados diferentes, penso que o problema advinha do facto de alguns alunos entenderem o limite como algo atingível e, quando queriam referir, nos seus argumentos, que os limites laterais eram diferentes, usavam a noção de imagem para conseguirem exprimir aproximadamente o que queriam dizer, em vez de usarem a terminologia correta (Cornu, 1983). Nesta perspetiva, o conhecimento acerca de funções está, geralmente, centrado na relação de dependência entre variáveis e no cálculo dos valores de y ou de x, ao passo que a noção de limite não é aplicada unicamente aos valores que pertencem ao domínio da função, nem o valor, ou a existência de limite, tem de coincidir obrigatoriamente com o valor ou com a existência da imagem, o que acabou por fomentar conflitos entre a determinação do domínio e justificações sobre a inexistência de limite baseadas no domínio da função (Sierpinska, 1985). Desta forma, a mobilização de alguns conceitos e processos relacionados com as funções, cuja compreensão não estava estabelecida de forma consolidada, contribuíram para a criação de algumas dificuldades, levando os alunos a considerar o limite como uma barreira estática que não podia ser atravessada ou um ponto a atingir, em vez de um processo dinâmico de aproximação. Por exemplo, o facto de a determinação de assíntotas horizontais ao gráfico de funções racionais estar relacionado com a determinação de limites no infinito induzia nos alunos a ideia de barreira intransponível, o que é incorreto porque, apesar das assíntotas de funções racionais parecerem corroborar esta conexão, as assíntotas podem ser atravessadas. No que diz respeito à relação entre limite e um ponto a atingir, este conflito era ocasionado pelo facto de alguns alunos associarem à identificação de limite a noção de imagem.

No entanto, considero que alguns destes conflitos são inevitáveis porque, sem o seu surgimento, a construção do conceito de limite ficaria, com certeza, mais pobre matematicamente. Só a superação deste tipo de conflitos pode dar algumas garantias sobre o progresso da aprendizagem e, neste sentido, a promoção de atividades de argumentação, que acabam por exigir o estabelecimento de conexões entre conhecimentos prévios e novos conteúdos, para além da atualização da terminologia a empregar nas argumentações, mostram-se bastante adequadas à sua prossecução.

Que aprendizagens, relacionadas com o limite de funções, são realizadas pelos alunos? Que dificuldades revelam nessas aprendizagens?

A análise que apoia a resposta a esta questão aparece dividida em duas subsecções. A primeira subsecção corresponde ao processo de análise de dados dedicado a tirar ilações sobre a aprendizagem de um método dinâmico de determinação do limite, que pode ser descrito como um processo gráfico de dupla aproximação — envolve a variação simultânea dos valores dos objetos e das imagens — mediante o qual se procede à identificação da existência, ou não, de limite e do respetivo valor. Já a segunda subsecção tem como objetivo compreender as aprendizagens relacionadas com a definição de limite segundo Heine, incluindo a noção de ponto aderente ao domínio de uma função e as propriedades sobre limites que decorrem desta definição e do conceito de limite lateral.

Inspirado pelas perspetivas de Tall (1992) sobre o processo de construção de conceitos matemáticos e pela natureza procetual atribuída ao conceito de limite (Tall, 2004), considerei que seria importante investir numa aproximação ao conceito de limite que evitasse estabelecer uma compreensão inicial do conceito baseada na definição formal ou na sua determinação por meio do cálculo algébrico, preferindo apostar na construção de uma compreensão de tipo relacional em detrimento da compreensão de tipo instrumental (Skemp, 1978).

Alguns alunos, quando se aperceberam que os cálculos algébricos não iam ser uma prioridade, revelaram alguma resistência à utilização do método dinâmico de determinação do limite, tentando impor a sua preferência pelos métodos de cálculo algébrico, porque já haviam sido aprendidos durante a unidade didática consagrada ao domínio curricular das sucessões ou porque andavam a aprendê-los, fora da escola, com os seus explicadores. Talvez, esta tendência venha ao encontro do obstáculo epistemológico classificado por Sierpinska (1985) de horror ao infinito, resultando da dificuldade de compreender um processo onde se tiram conclusões sobre um número infinito de termos, baseadas na análise de um número finito de termos, e culmina, frequentemente, com a obtenção de um valor concreto que nunca chega a ser atingido (Juter, 2007).

A utilização do método dinâmico também revelou alguns problemas associados à inatingibilidade do limite (Cornu, 1983). Os alunos evidenciavam menos dificuldades quando tinham de investigar o limite de uma função para valores de x que tendessem para $+\infty$ ou $-\infty$ do que quando os valores de x tendiam para um valor finito. Mas, estas dificuldades, acentuavam-se quando os valores de x tendiam para valores finitos e, simultaneamente, os valores de y tendiam para infinito, revelando que os alunos utilizavam as imagens para concretizar os valores dos limites, apesar de, por vezes, terem sido induzidos ao erro devido ao uso desta estratégia.

Mais surpreendente, foi ter verificado que os alunos evidenciavam problemas em determinar o limite quando os valores de x tendiam para um valor finito e a função era contínua nesse ponto, ou seja, quando o valor do limite correspondia à sua imagem. Nestes casos, os alunos tinham a tendência de seguir a linha da função e indicar o limite correspondente à tendência observada pelas imagens quando x tendia para $+\infty$ ou $-\infty$.

Contudo, no fim da exploração da primeira tarefa, constatei que grande parte da turma tinha revelado mais dificuldades em construir uma justificação que explicasse o porquê das suas opções, não conseguindo expor os seus raciocínios procedimentais, do que em efetuar os procedimentos que o levariam à identificação do limite. No mínimo, isto podia ser entendido de três formas: (1) como um sinal de insuficiente compreensão do conceito, ou seja, a aplicação correta dos procedimentos envolvidos no processo não significava a compreensão do conceito (Cornu, 1983); (2) dificuldades em empregar a terminologia correta (Cornu, 1983) ou relutância em produzir esquemas explicativos porque, como não era um processo de resolução usual, os alunos desconfiavam da sua efetividade matemática; (3) um misto das razões apontadas em (1) e em (2).

Após as definições de ponto aderente a um conjunto e de limite segundo Heine terem sido introduzidas nas atividades de aprendizagem, os alunos começaram por revelar dificuldade em relacioná-las com o método dinâmico de determinação do limite, verificando-se, principalmente na tarefa 2, alguma relutância em mobilizar ambas as definições. No entanto, considero que a integração de questões que levassem a associar o preenchimento dos valores da tabela com a representação gráfica das funções enunciadas na tarefa 2, talvez tivesse colaborado para a aprendizagem da definição de limite segundo Heine porque iria favorecer o estabelecimento de conexões entre o processo gráfico de dupla aproximação e a compreensão dos requisitos impostos pela definição.

Na tarefa 3, apesar da maioria dos grupos ter recorrido ao método dinâmico de determinação do limite para construir comentários que continham as justificações requeridas no enunciado da tarefa, houveram grupos que tentaram ir mais longe nas suas argumentações tentando produzir as justificações a partir a partir do texto das duas definições. Porém, estes grupos acabaram por revelar alguma confusão ao apoiar as suas justificações na definição de ponto aderente em vez de aplicarem a definição de limite segundo Heine.

A realização da questão aula veio comprovar isso mesmo, só que, desta vez, a maior parte dos alunos mostrou que tinha compreendido a diferença entre as duas definições, passando a recorrer à definição de limite segundo Heine ou, em alternativa, à propriedade que pode ser enunciada através da sequência de igualdades, $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, entre limites laterais e a imagem do ponto aderente, relativamente ao qual se determina o limite da função. Na definição de Heine é indicado que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ apenas quando as imagens pela função *f* de **todas** as sucessões u_n, v_n, w_n, tais que $u_n \to a^+$, $v_n \to a^-$ e $w_n = a$, por valores pertencentes ao D_f (domínio da função $f(x)$), tendam todas para o mesmo valor b ($b \in \mathbb{R}, b \to +\infty\ ou\ b \to -\infty$). Ao passo que a definição de ponto aderente indica que a é ponto aderente a um conjunto A quando existe **uma** sucessão (u_n) de elementos de A tal que $\lim u_n = a$. Ou seja, até à discussão coletiva em torno das resoluções da tarefa 3, parecia que poucos alunos tinham dado importância aos termos indicado a negrito, o que acabava por originar um conflito entre ambas as definições. Baseando-me nesta possibilidade, admito que, até então, a compreensão dos alunos do conceito de limite era predominantemente influenciada pela noção intuitiva de limite, desenvolvida com o método dinâmico de determinação do limite, e ambas as definições eram constituídas como fatores de dissuasão à sua expansão. Considero, portanto, que a atividade argumentativa dos alunos foi essencial para descobrir e superar este obstáculo à construção do conceito de limite e à respetiva aprendizagem da definição formal.

A tarefa 3 também introduziu a noção de limite lateral, exigindo a construção de argumentos com a justificação da não existência de limite, ou o contrário, alicerçando as garantias deste aspeto na investigação da igualdade entre ambos os limites laterais e, no caso de ser necessário, com a imagem do ponto aderente. Penso que a terminologia associada aos limites laterais acabou por fornecer a possibilidade de tornar mais acessível a compreensão do texto da definição de limite, colaborando para aprofundar a construção do significado de limite.

Após a superação do obstáculo referido anteriormente, a aprendizagem da definição de limite exigia, portanto, que os alunos conseguissem associar o processo gráfico de dupla aproximação ao enunciado da própria definição e à referência de dois tipos de sucessões, (u_n) e $(f(u_n))$, normalmente encarada como bastante complexa. A realização da questão aula mostrou que uma boa parte dos alunos conseguiu estabelecer a correspondência entre o limite da sucessão (u_n) ($\lim u_n = a$), cujos termos tinham de pertencer ao domínio da função $f(x)$, com a aproximação ao valor a dos valores do domínio da função, e, simultaneamente, estabelecer a correspondência da tendência revelada pelos termos da sucessão $(f(u_n))$, com $\lim f(u_n) = b$, com a aproximação dos valores das imagens $f(x)$ ao valor b.

Nestes casos, a construção do conceito de limite pode permitir aos alunos atingir outras possibilidades concetuais, incentivado o estabelecimento de conexões com outros conceitos, processos ou propriedades. Por exemplo, a aprendizagem da definição de limite, ao desencadear uma compreensão do conceito de limite mais formalizada, acabou por encorajar os alunos a dar outra força às suas justificações, passando a fundamentar o texto das suas justificações baseando-se nas características e condições enunciadas na definição de limite segundo Heine. Apesar de ser legítimo que o aluno elabore a prova considerando que o único indivíduo a convencer é o professor, é importante que os alunos compreendam que assim estão a contribuir para o enfraquecimento da prova fornecida, retirando-lhe a possibilidade de ser constituída como explicação e sistematização de conhecimentos relacionados com o limite de funções.

De qualquer forma, parece-me que a generalidade dos alunos compreendeu que uma das principais funções das definições matemáticas passa por estabelecer as características ou condições essenciais que permitem classificar, nomear e distinguir os vários processos e objetos matemáticos.

Embora tenha a noção de que nem todos os alunos conseguiram aproximar a noção intuitiva de limite da definição formal de limite, considero que a intervenção letiva constituiu uma oportunidade de os alunos desenvolverem atividades de aprendizagem em torno do significado de limite de uma função. Quer o aparecimento de conflitos quer a sua superação, devem fazer parte do processo de aprendizagem do conceito de limite porque só com a sua experiência o aluno consegue encontrar motivos para aceitar as várias vertentes do conhecimento matemático e sentir curiosidade por compreender a abrangência de conceitos como o conceito de limite.

6.3. Reflexão final

A produção e planificação deste estudo constituiu uma oportunidade única para ampliar o meu conhecimento na área da investigação em educação e fomentar o meu interesse pela mesma, ao mesmo tempo que contribuiu para a minha formação enquanto futuro professor de Matemática. Por outro lado, assistir às aulas da orientadora cooperante e contar com a sua colaboração desde o início do ano letivo foi uma experiência enriquecedora que propiciou o conhecimento da turma e da forma como participavam e reagiam aos diferentes processos de ensino desenvolvidos ao longo do ano, para além de ter permitido a realização de uma reflexão sistemática sobre a prática letiva por intermédio da qual tomei consciência de que o trabalho desenvolvido em sala de aula depende em grande medida do conhecimento que o professor tem da sua turma.

Ainda no âmbito da investigação, posso admitir que, relativamente aos vários processos envolvidos durante a realização do estudo, foi o da análise dos dados aquele que suscitou mais dificuldades e ao longo do qual senti mais necessidade de desenvolver a minha competência. Mas, também a revisão de literatura merece o meu destaque, pois consistiu numa fase bastante valiosa que contribuiu para o enriquecimento do meu património intelectual, para além de ter servido para fundamentar o estudo e para inspirar, sempre que foi necessário, o trabalho moroso da sua escrita.

No que concerne ao estudo desenvolvido durante a prática de ensino supervisionada, a sua realização permitiu-me compreender e refletir sobre a importância dos processos de argumentação desenvolvidos na aula de Matemática, sem esquecer as dificuldades que os alunos evidenciaram na formulação de argumentos que procuravam dar expressão e sustentar os seus raciocínios. Contudo, a promoção de ambientes educativos, que contribuam para incutir nos alunos uma cultura de argumentação onde a partilha e avaliação de argumentos se tornaria numa prática comum, não acontece de forma espontânea, exigindo por parte do professor um trabalho de calibragem e de aperfeiçoamento contínuos, tanto das tarefas implementadas como do seu discurso, sem esquecer a gestão do tempo despendido em cada momento.

Excluindo a lecionação da unidade didática visada neste estudo, os procedimentos que mais contribuíram para a minha satisfação pessoal foram a seleção, a adaptação, a criação e a sequenciação de tarefas. Além de considerar fundamental a adequação das tarefas quer aos objetivos de aprendizagem pretendidos quer à turma na qual vai ser aplicada, é muito desafiante procurar diversificar e ser criativo, tentando simultaneamente antecipar os méritos e obstáculos das tarefas, e congratulante sentir que alcançamos a adequação desejada, em particular se as tarefas tiverem sido criadas por nós. Na fase de elaboração das tarefas, procurei que estas promovessem a exploração e descoberta do conceito de limite, sem esquecer a aprendizagem de processos que visassem a sua determinação ou aplicação, ao mesmo tempo que pretendia estimular a capacidade argumentativa dos alunos introduzindo questões e problemas que fomentavam o desenvolvimento de processos de argumentação matemática, como a formulação e teste de conjeturas, a prova matemática e a justificação de procedimentos e raciocínios. Nesta perspetiva, a opção por tarefas de tipo exploratório pareceu-me a mais acertada, porque estas tarefas são especialmente vocacionadas para desafiar os alunos a adotar um papel ativo na construção do seu próprio conhecimento e podiam ser usadas para induzir o desenvolvimento de hábitos argumentativos nos alunos.

Admito, no entanto, que a adequação das tarefas não foi um processo fácil e imediato. Por vezes, foi necessário alterar as tarefas de uma aula para outra, encurtando a sua extensão, modificando o texto do seu enunciado ou trocando os problemas e exercícios por outros mais simples, ou mais complexos, consoante as aprendizagens alcançadas na aula anterior. Embora tenha consciência de que algumas tarefas ainda precisassem de ser aperfeiçoadas, principalmente a tarefa 2, considero que as tarefas de exploração contribuíram bastante para os alunos alcançarem os objetivos de aprendizagem previamente delineados, sem esquecer o objetivo do estudo, que acompanhou a minha prática letiva.

Como já foi referido anteriormente, o trabalho exploratório requer uma planificação cuidada e costuma ser segmentado em três fases, sendo que o professor tem um papel importante em cada uma destas fases: a introdução da tarefa, o desenvolvimento do trabalho autónomo e a discussão em grande grupo centrada na apresentação de resoluções e sistematização de conceitos envolvidos.

Para a introdução das tarefas, cheguei a recorrer ao Geogebra de maneira a explorar as suas potencialidades de visualização gráfica e de criação de modelos dinâmicos, projetando, no quadro interativo, gráficos de sucessões e de funções reais de variável real produzidos previamente com aquele programa informático, com a intenção de estimular a curiosidade e participação dos alunos, sem esquecer a necessidade de diversificar as atividades efetuadas em sala de aula. Porém, devo admitir que as expectativas superaram os resultados. Mas, isto não significa que a utilização do Geogebra tenha sido uma iniciativa completamente gorada. Significa antes que a apresentação e discussão em torno da visualização dos gráficos tem de ser aperfeiçoada e que a exibição de animações e de elementos dinâmicos tem de ser melhor enquadrada.

Para além do Geogebra, a máquina de calcular gráfica foi um recurso muito usado durante a fase de trabalho autónomo. Mas, neste caso, a componente visual da calculadora gráfica acabou por cumprir as minhas expectativas, proporcionando momentos de deliberação entre os elementos de cada grupo e contribuindo para a obtenção de exemplos e troca de argumentos durante as discussões coletivas, promovendo, portanto, ambientes propícios à exploração do significado do conceito de limite (Dugdale, 1993).

Também foi importante o modo como os alunos trabalharam, pois, uma metodologia de trabalho em pequeno grupo influencia positivamente a realização deste tipo de tarefas, fomentando a possibilidade de os alunos comunicarem e debaterem ideias entre si. Um aspeto, resultante da opção estratégica de criar pequenos grupos (pares e trios), que considero importante destacar é o facto desta metodologia de trabalho se revelar favorável à participação nas atividades de aprendizagem dos alunos com fraco aproveitamento que costumam apresentar uma postura pouco confiante e participativa em aula. Ao necessitarem de discutir estratégias de resolução e deliberar como constituir as produções escritas com os colegas do grupo, esta metodologia permite que estes alunos tomem um papel mais ativo no decorrer da aula.

Na fase de trabalho autónomo, penso que as minhas intervenções foram sempre no sentido de garantir que o trabalho de exploração das tarefas se centrasse na atividade dos alunos, no entanto, o momento de discussão coletiva sobre as resoluções dos alunos não correu assim tão bem. Embora considere que, por vezes, as discussões tenham sido proveitosas, precisam de ser mais praticadas e trabalhadas de forma a centrar as discussões nas resoluções dos alunos e evitar tornar as minhas considerações no enfoque principal da atenção dos alunos.

No entanto, estas situações resultaram, quase sempre, de dificuldades na gestão do tempo dos diferentes momentos da aula. Uma das principais dificuldades estava relacionada com a gestão do tempo de duração da introdução das tarefas de exploração, que acabavam sempre por demorar mais do que havia sido planificado. Outro problema de gestão de tempo advinha da duração dos momentos de trabalho autónomo, porque os alunos evidenciavam um ritmo de trabalho bastante lento e eu nunca consegui mudar a sua atitude, incentivando-os a assumirem a responsabilidade sobre o tempo que dispunham para trabalhar de maneira a cumprirem as durações estipuladas nos planos de aula. Assim, durante os momentos de discussão coletiva senti, constantemente, o conflito entre a necessidade de avançar ou a de conceder mais algum tempo em torno das resoluções, entre a necessidade de dar tempo aos alunos para expor os seus argumentos e considerações ou de desvirtuar a discussão e centrá-la na minha exposição e correção dos conteúdos. De qualquer forma, um dos aspetos a melhorar está relacionado com a necessidade de não focar as aulas nas minhas ações e explicações. O outro aspeto está relacionado com a gestão do tempo dos diversos momentos de aula, porque só assim poderei deixar os alunos desenvolver os raciocínios por si próprios. Para isto acontecer, penso que terei de resistir ao impulso de explicar todos os pormenores e estratégias de resolução que as dúvidas ou questões dos alunos possam suscitar, esforçar-me mais em respeitar as indicações e ações previstas nos planos de aula e gerir melhor as transições entre momentos. Considero que planificar as aulas, detalhadamente e por escrito, desenvolveu a minha compreensão sobre estes aspetos, mas acabou por não ser suficiente. Relativamente à gestão do quadro, penso que também devo tornar mais concisas as orientações previstas nos planos de aula.

Em termos das limitações e condicionantes conjunturais deste estudo, destaco a curta duração do mesmo e o momento letivo em que foi desenvolvido. Efetuar a minha intervenção letiva após o segundo teste sumativo, nas duas últimas semanas antes das férias da Páscoa, podia ter constituído um grande problema em termos do desempenho e da atitude dos alunos. Apesar dos atrasos verificados no início das aulas e de alguma desconcentração e ruído excessivo evidenciados na segunda aula da intervenção, tenho de admitir, no entanto, que a participação e o trabalho desenvolvido não foram tão nefastos como se podia esperar, e também não duvido que a boa relação, criada com os alunos desde o início do ano letivo, muito contribuiu para tal.

Todavia, tomando em consideração o objetivo do estudo de cariz investigativo e as questões de investigação levantadas de forma a orientar o seu desenvolvimento, sou obrigado a constatar que o tempo despendido foi insuficiente. Como a intervenção letiva apenas contemplou cinco aulas de 90 minutos, em que dois terços de uma delas foram destinados à implementação de um momento de avaliação, penso que isto acabou por limitar bastante a caracterização dos processos argumentativos assim como a obtenção de dados para obter respostas mais concretas sobre as aprendizagens. Por outro lado, isto também obrigou a alterar o plano inicial sobre os tópicos programáticos a contemplar na unidade didática. Bastou que o desenvolvimento das primeiras duas aulas (sobretudo a segunda aula da intervenção) tivessem originado alguns atrasos na lecionação dos tópicos planificados para que as operações entre limites tivessem de deixar de ser trabalhadas durante a intervenção letiva. Mas, como já tinha elaborado uma tarefa de exploração cujo enfoque era precisamente a exploração desse tópico, ficou combinado com a orientadora cooperante que esta tarefa seria adaptada ao processo de ensino a desenvolver fora da minha intervenção letiva, mas que ainda assim poderia utilizar, no estudo, as resoluções que pudessem servir para caracterizar processos argumentativos. A grande extensão do programa curricular de Matemática, do 11º ano de escolaridade, obrigava, naturalmente, a pôr em primeiro lugar os objetivos de aprendizagem dos alunos e deixar a recolha de dados como segunda prioridade.

No futuro, se chegar a desempenhar a função de professor de Matemática, creio que seria interessante continuar a promover nas minhas aulas contextos educativos que procurem estimular, nos alunos, a construção de argumentos e a realização de atividades que exijam a discussão em torno da aceitação e rejeição de argumentos. Mas, não só com alunos do ensino secundário, porque acredito que também os alunos do ensino básico são capazes de compreender e produzir provas matemáticas com maior ou menor grau de formalização, desde que sejam bem orientados e estimulados e suficientemente desafiados. Desafiar os alunos a pensar sobre Matemática e a comunicar as suas ideias, faz com que os alunos se sintam mais convincentes e seguros dos seus argumentos (NCTM, 2007). Isto pode comprovar que fiquei bastante satisfeito, não obstante as dificuldades apontadas, com o trabalho realizado em torno da capacidade argumentativa dos alunos. Considero, mesmo, que este trabalho favoreceu o desenvolvimento de aprendizagens significativas relacionadas com os conceitos e processos envolvidos na unidade didática, e acredito que, no futuro, poderá ajudar os alunos a estabelecer relações de significado entre representações de cariz formal e representações de cariz intuitivo.

Referências

Abrahão, N. P. (2004). *Avaliação e erro construtivo libertador: uma teoria-prática includente em educação.* Porto Alegre: EDIPUCRS.

Alves, M. A. (2005). *A argumentação filosófica: Chaïm Perelman e o auditório universal*. Belo Horizonte: MG.

APM (1988). *Renovação do currículo de Matemática* (1ª ed.). Lisboa: APM.

Arends, R. (1995). *Aprender a ensinar*. Lisboa: McGraw-Hill.

Ausubel, D. P. (1968). *Educational psychology. A cognitive view*. New York, NY: Holt, Rinehart and Winston.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children* (pp. 216-235). London: Hodder and Stoughton.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: una empresa docente y Universidad de Los Andes.

Bello, R. (2004). El modelo argumentativo de Toulmin en la escritura de artículos de investigación educativa. *Revista Digital Universitaria, 5*(1), 1-18.

Blanché, R. (1983). *A Ciência actual e o racionalismo*. Brasil: Rés.

Boavida, A. M. (2005). *A argumentação em Matemática. Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de* colaboração. (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa, Portugal).

Boavida, A. (2008). Raciocinar para aprender e aprender a raciocinar. *Educação e Matemática*, *100*, 1.

Boavida, A. M., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A Experiência matemática no Ensino Básico. Programa de formação contínua em Matemática para professores do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico*. Lisboa: ME.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Boyer, C. (1974). *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgar Blücher.

Brandemberg, J. C. (2010) *Uma análise histórico-epistemológica do conceito de grupo*. São Paulo: Livraria da Física.

Breton, P. & Gauthier, G. (2001). *História das Teorias da Argumentação*. Lisboa: Editorial Bizâncio.

Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de Matemática: Um projecto curricular no 8.º ano* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa).

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática. Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, *115*, 11-17.

Carrilho, M. M. (1992). Argumentação e contexto. *Caderno de Filosofias: Argumentação, Retórica, Racionalidades, 5*, 21-37.

Cengiz, N., Kline, K., & Grant, T., J. (2011). Extending students' mathematical thinking during whole-group discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(5), 355-374.

Chiosso, G. (2003). *Teorie dell'Educazione e della Formazione*. Città di Castello: Mondadori Università.

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.

Cobb, P., & Yackel, E. (1998). A constructivist perspective of the mathematics classroom. In F. Seeger, J. Voigt, & U. Wascheschio (Eds.), *The culture of the mathematics classroom* (pp. 158-190). Cambridge: Cambridge University Press.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education*. New York, NY: Routledge.

Cornu, B. (1983). *Aprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles*. (Thèse de doctorat de troisième cycle de mathèmatiques pure, Université Scientifique et Medicale de Grenoble, France).

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 153-166). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Costa, A. (2001). *Aprendizagem por mudança conceptual em Biologia – Um estudo sobre o conceito de sistema de regulação com alunos do 11.º ano de Ensino Secundário.* (Tese de doutoramento, Universidade do Minho, Portugal).

Costa, B. & Rodrigues, E. (2017). *Novo Espaço - Matemática A - 11.º ano, Parte 2*. Porto: Porto Editora.

Cunningham, S. & Zimmermann, W. (1991). Editors' introduction: What is mathematical visualization? In S. Cunningham & W. Zimmermann (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 1-8). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Dauben, J., (1990). *Georg Cantor: His mathematics and philosophy of the infinite*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Demana, F., & Waits, B. K. (1992). A computer for all students. *The Mathematics Teacher*, *85*(2), 94-95.

Dias, C., & Morais, J. (2004). Interação em sala de aula: Observação e análise. *Revista Referência*, *11*, 49-58.

Domingos, A. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados: A Matemática no início do superior*. (Tese de doutoramento, Universidade Nova de Lisboa, Portugal).

Douek, N. (2000). *Comparing argumentation and proof in a mathematics education perspective*. Retirado de http://www-cabri.imag.fr/preuve em 23 de dezembro de 2018.

Douek, N., & Pichat, M. (2003). From oral to written texts in grade I and the approach to mathematical argumentation. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th Conference of PME-NA,* (Vol. 2, pp. 341-348). Honolulu: CRDG, College of Education of University of Hawai.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer.

Dugdale, S. (1993). Functions and graphs - Perspectives on student thinking. In T. A. Romberg, E. Fennema, & T. P. Carpenter (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of functions* (pp. 101–130). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Duval, R. (1990). Pour une aproche cognitive de l'argumentation. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 3*, 195-221.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la demonstration. *Educational Studies in Mathematics, 22*(3), 233-261.

Duval, R. (1992-1993). Argumenter, démontrer, expliquer: Continuité ou rupture cognitive? *Petit x*, *31*, 37-61.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103-131.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York, NY: MacMillan.

Escola Secundária Camões [ESC] (2010). *Projeto educativo 2014/2017*. Lisboa: ESC**.**

Fernández-Plaza, J., Ruiz-Hidalgo, J., & Rico, L. (2013). Análisis conceptual de términos específicos: Concepto de límite finito de una función en un punto. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española (RSME), 16*(1), 131-146.

Fischbein, E. (1994). The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. In R. Biehler, R. Straber, & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 231-245). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Galbraith, P. (1995). Mathematics as reasoning. *The Mathematics Teacher*, *88*(5), 412-417.

Gil, P. & Martinho, M. (2014). O professor e o desenvolvimento da capacidade de argumentação: equações do 2.ºgrau na antiga Babilónia com alunos do 9.º ano. In J. P. Ponte (Org.), *Práticas profissionais dos professores de Matemática*, (pp. 313-343). Lisboa: Instituto de Educação, Universidade de Lisboa.

Gomes, F. & Viegas, C. (2005). *XEQMAT, Matemática 12.º ano, Volume 2*. Lisboa: Texto Editores.

Grácio, R. (1993). Introdução à tradução portuguesa da obra de C. Perelman, *O império retórico: Retórica e argumentação* (pp. 5-11). Porto: Edições ASA.

Gray, E. & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 115- 141.

Greenes, C., & Findell, C. (1999). Developing student´s algebric reasoning abilities. In L. V. Stiff, & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades k-12* (pp. 127–137). Reston, VA: NCTM.

Hanna, G. (1996). The ongoing value of proof. In Á Guitiérrez & L. Puig (Eds.), Proceedings of *20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 21-34). Valência: PME.

Hanna, G., & Barbeau, E. (2010). Proof as bearers of mathematical knowledge. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Eds.), *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives* (pp. 85-100). London: Springer.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward a comprehensive perspective on proof. In F. Lester (Org.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 805–842). Reston, VA: NCTM.

Heinemann, F. (1993). *A Filosofia no século XX* (4ª ed.) Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Henriques, A. (2010). *O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da análise numérica num contexto de actividades de investigação*. (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa, Portugal).

Hohenwarter, M. & Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra: the case of GeoGebra. In D. Küchemann (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 27*(3), 126-131.

Juter, K. (2007). Students' concept development of limits. *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME5)* (pp. 2320-2329). Larnaca, Cyprus: University of Cyprus and ERME.

Katz, V. J. (2010). *História da Matemática* (2ª ed.). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kuhn, T. (1970). *The structure of scientific revolutions*. Chicago, IL: The University of Chicago Press.

Lannin, J., Ellis A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematics reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8*. Reston, VA: NCTM.

Lin, P. (2018). O desenvolvimento da argumentação matemática por estudantes de uma turma do ensino fundamental. *Educação & Realidade*, 43(3), 1171-1192.

Magalhães, M. G., & Martinho, M. H. (2011). A calculadora gráfica como instrumento para o desenvolvimento da argumentação matemática. In Atas do *XXII SIEM* (pp. 791-806). Lisboa: APM.

Marques, R. (1999). *Modelos pedagógicos actuais*. Lisboa: Plátano.

Marshall, C., & Rossman, G. B. (2006*). Designing qualitative research*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1984). *Thinking Mathematically*. London: Addison-Wesley Publishing Company.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2013). Desenvolvendo o raciocínio matemático: generalização e justificação no estudo das inequações. *Boletim Gepem*, *62*, 17-31.

Meyer, M. (1982). *Lógica, Linguagem e Argumentação*. Lisboa: Editorial Teorema.

Ministério da Educação (2002). *Programa de Matemática A para 11.º ano.* Lisboa: ME.

Ministério da Educação (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. Lisboa: ME/DGE.

Ministério da Educação (2018). *Aprendizagens essenciais, Ensino Secundário Matemática A*. Lisboa: ME/DGE.

Ministério da Educação e Ciência (2014). *Programa e metas curriculares de Matemática A do Ensino Secundário.* Lisboa: MEC.

Monaghan, J. (1986). *Adolescents' understanding of limits and infinity*. (PhD thesis, University of Warwick).

Morrison, K. R. B. (1993). *Planning and accomplishing school-centred evaluation*. Dereham: Peter Francis.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM & IIE (Instituto de Inovação Educacional).

NCTM (2000). *Standards 2000 - Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

NCTM (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making.* Reston, VA: NCTM.

Oehrtman, M. (2008). Layers of abstraction: Theory and design for the instruction of limit concepts. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics education* (pp. 65-80). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Oehrtman, M., Swinyard, C., & Martin, J. (2014). Problems and solutions in students' reinvention of a definition for sequence convergence. *Journal of Mathematical Behavior*, *33*, 131-148.

Oléron, P. (1996). *L' argumentation*. Paris: Presses Universitaires de France.

Oliveira, M. (2017). *A Questão do relativismo na teoria da argumentação de Stephen Toulmin*. (Tese de mestrado, Universidade de Coimbra).

Oliveira, P. (2002). *A investigação do professor, do matemático e do aluno: uma discussão epistemológica*. (Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa).

Pedemonte, B. (2002). *Étude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de da démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*. (Tese de doutoramento, Université Joseph Fourier-Grenoble I, France).

Pedemonte, B. (2012). L'argumentation en mathématiques et sa relation avec la démonstration. *Quadrante*, *21*(2), 27-50.

Perelman, C. (1992). Lógica formal e lógica informal. *Caderno de Filosofias: Argumentação, Retórica, Racionalidades*, *5*, 11-20.

Perelman, C. (1993). *O império retórico: Retórica e argumentação*. Porto: Edições ASA.

Pinto, J., & Santos, L. (2006). *Modelos de avaliação das aprendizagens*. Lisboa: Universidade Aberta.

Plantin, C. (1990). *Essais sur l' argumentation. introduction linguistique a l'étude de la parole argumentative*. Paris: Éditions Kimé.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics* (Vol. I). New Jersey, NJ: Princeton University Press.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.*), O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2014). Tarefas no ensino e na aprendizagem da matemática. In J. P. Ponte (Org.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 13-27). Lisboa: UIDEF.

Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didática da Matemática: Ensino Secundário*. Lisboa: Ministério da Educação.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Praxis Educativa*, *7*(2), 355-377.

Reale, G. (2001). *Introdução a Aristóteles*. Lisboa: Edições 70.

Reboul, O. (2000). *A Filosofia da Educação*. Lisboa: Edições 70.

Ribeiro, A. (2005). *O Cabri-Géomètre e a construção de uma nova cultura Matemática – um estudo no âmbito da formação inicial de professores do 1º CEB*. (Tese de Doutoramento, Universidade de Aveiro).

Rivera, F., & Becker, J. (2009). Algebraic reasoning through patterns. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *15*, 213-221.

Sàágua, J. (2002). Três notas sobre Forma Lógica. *Cadernos de Filosofia, 12*, 49-77.

Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes, L. Santos, H. Gomes, & C. Rodrigues (Eds.), *Avaliação em Matemática: Problemas e desafios* (pp. 1-18). Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *The Journal of the learning sciences*, *16*(4), 567–615.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6(1), 5-67.

Silva, S. & Paulo, J. (1963). *Compêndio de Álgebra. Tomo I – VI Ano*. Lisboa: Livraria Popular de Francisco Franco.

Silva, S. (1976). *Compêndio de Matemática* (vol. 2). Lisboa: Gabinete de Estudos e Planeamento do Ministério da Educação e Investigação Científica.

Simãozinho, C. (2014*). A argumentação matemática dos alunos do 11º ano no tema das funções*. (Relatório da Prática de Ensino Supervisionada, Universidade de Lisboa, Portugal).

Skemp, R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher*, *26*(3), 9-15.

Spivak, M. (1994). *Calculus* (3.ª ed.). Houston, TX: Public or Perish.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313-340.

Stylianides, A. (2009). Breaking the equation "empirical argument = proof". *Mathematics Teaching*, *213*, 9-14.

Stylianides, G. (2009). Reasoning-and-Proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*(4), 258-288.

Stylianides, G., & Stylianides, A. (2008). Proof in school mathematics: Insights from psychological research into students' ability for deductive reasoning. *Mathematics Thinking and Learning*, *10*(2), 103-133.

Stylianides, G., & Stylianides, A. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(3), 314-352.

Sumares, M. (1994). *Sobre "Da Certeza" de Ludwig Wittgenstein: Um estudo introdutório*. Porto: Edições Contraponto.

Schwarzenberger R. & Tall D. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching, 82*, 44-49.

Tall, D. (1989). The nature of mathematical proof. *Mathematics Teaching*, *127*, 28-32.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-21). Dordrecht: Kluwer.

Tall, D. (1992). Students' Difficulties in Calculus. In *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus, ICME-7* (pp. 13– 28). Québec: Les Presses de l' Université Laval.

Tall, D. (1995). Cognitive growth on elementary and advanced mathematical thinking. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 61-75). Recife, Brasil: PME.

Tall, D. (1999). The cognitive development of proof: Is mathematical proof for all or for some? In Z. Usiskin (Ed.), *Developments in school mathematics education around the world* (Vol. 4, pp. 117-136). Reston, VA: NCTM.

Tall, D. (2004). Introducing three worlds of mathematics. *For the Learning of Mathematics, 23*(3), 29–33.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12,* 151-169.

Toulmin, S. (1993). *Les usages de l'argumentation*. Paris: PUF.

Toulmin, S. (2001). *Return to Reason.* London: Harvard University Press.

Toulmin, S., Rieke, R., & Janik, A. (1984). *An Introduction to Reasoning*. New York, NY: Macmillan.

Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas actuais. Materiais para professores*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Vincent, J. , Chick, H., & McCrae, B. (2005). Argumentation profile charts as tools for analyzing students´ argumentations. In H. L. Chick, & J. L. Vincent (Eds,), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 4, pp. 281-288). Melbourne: PME.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, *14*(3), 293-305.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in teaching and learning mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65–81). Dordrecht: Kluwer.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), 356-366.

Vygotsky, L. S. (1988). *A formação social da mente. O desenvolvimento dos processos superiores*. S. Paulo: Martins Fontes.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 458 - 477.

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 227- 236). Reston, VA: NCTM.

Yopp, D., & Ellsworth, J. (2016). Generalizing and skepticism: bringing research to practice. *Mathematics teaching in the middle school*, *22*(5), 284-292.

Anexo I: Planos de aula

2018/2019

Plano de aula
25 de março de 2019
Escola Secundária de Camões

1ª aula	Secundário – 11º ano	Tempo: 90 minutos

Domínio: Funções reais de variável real.
Tópico: Limites segundo Heine de funções reais de variável real.
Subtópico: Limites no infinito.

Sumário: Determinação de limites quando x tende para infinito a partir de uma abordagem gráfica de funções reais de variável real.

Objetivos de aprendizagem

- Mobilizar conhecimentos prévios de limites de sucessões;
- Mobilizar conhecimentos prévios de funções reais de variável real;
- Representar e interpretar gráficos de funções, com a recurso à calculadora;
- Desenvolver uma noção intuitiva do conceito de limite a partir da interpretação do gráfico de funções reais de variável natural (sucessões) e de variável real;
- Determinar limites quando x tende para infinito a partir da representação do gráfico de funções;
- Explicar, conjeturar e justificar resultados.

Capacidades transversais

- Intuição matemática;
- Relacionar representações gráficas e algébricas;
- Argumentação matemática;
- Comunicação matemática;
- Trabalho colaborativo.

Conhecimentos prévios

- Determinar e interpretar graficamente o limite de uma sucessão (casos de convergência e de limites infinitos);
- Reconhecer a unicidade do limite;
- Relacionar a expressão algébrica de uma função com a sua representação gráfica e vice-versa;
- Reconhecer características do gráfico de funções afins, de funções de grau maior ou igual a 2, de funções racionais e de funções trigonométricas: domínio, monotonia, simetria, assintotas, convergência.

Recursos

- Projetor: Projeção de gráficos de funções realizados previamente com o Geogebra;
- Quadro branco e marcador;
- Tarefa de exploração: “Limites no infinito”;
- Calculadora gráfica.

Metodologia de trabalho

- Discussão de tópicos sobre domínios e limites de funções com o grupo turma a partir da projeção dos gráficos de sucessões e de funções reais de variável real;
- Trabalho autónomo e colaborativo (em grupos de dois) dos alunos: realização de uma tarefa de exploração que requer a utilização da calculadora gráfica;
- Monitorização do trabalho autónomo;
- Apresentação de resoluções de alunos e discussão coletiva em torno das mesmas.

Momentos da aula

1) Início da aula e registo do sumário;	5 min
2) Discussão de tópicos a partir da leitura do gráfico de funções com o grupo turma;	20 min
3) Trabalho autónomo (pares de alunos);	45 min

4)	Apresentação e discussão, em grande grupo, de resoluções de alunos; **Nota:** o trabalho autónomo, seguido da apresentação e discussão de resoluções, pode ser dividido em duas fases aproximadamente de 30min (trabalho autónomo 20min/ discussão 10min). No caso de a maior parte dos pares demonstrarem evidentes dificuldades em desenvolver a tarefa durante as **questões 1** e **questão 2**, levar a resolução para o quadro branco iniciando o primeiro momento de discussão coletiva antes dos alunos resolverem a **questão 2.1**.	20 min

Desenvolvimento da aula e estratégias a implementar	**Tempo**
1) Organização da sala de aula e registo do sumário.	5 min.
2) Discussão de tópicos em grande grupo: A partir da representação do gráfico de sucessões e de funções (realizados e apresentados com o Geogebra) conhecidas dos alunos (função afim, função quadrática, função racional), pretende-se que os alunos identifiquem o comportamento dos termos de sucessões ou das imagens de funções através da análise das representações dos gráficos respetivos. Os alunos poderão observar, a partir do deslocamento de um ponto ao longo do gráfico de cada função, que a determinação do limite de uma função pode decorrer da identificação do valor y para o qual as imagens da função se aproximam ou tendem, quando os objetos correspondentes se aproximam de um certo valor x. O processo de identificação do limite passará, assim, por propor aos alunos a compreensão do conceito a partir de uma dupla aproximação: *quando n tende para $+\infty$, ou seja, quando n se aproxima de um valor positivo tão grande quanto seja possível*, *os termos da sucessão aproximam-se, tendem ou convergem, para um certo valor real ou tendem para infinito*. Inicialmente, serão utilizadas sucessões com os seguintes termos gerais: $$U_n = \frac{4}{n};\quad V_n = -\frac{n}{2} + 3;\quad W_n = \frac{1}{2}(n-8)^2 - 3$$ Depois, propor que se passe a identificar o domínio relativamente ao conjunto dos números reais e projetar o gráfico das funções de variável real com expressões correspondentes às das sucessões referidas. Pedir aos alunos para determinarem os limites quando *x* tende para $\pm\infty$ ou para um número real e que expliquem como procederam. **Dificuldades dos alunos:** Apesar da visualização do deslocamento de um ponto ao longo do gráfico, os alunos poderão não compreender o procedimento de dupla aproximação. **Papel do professor:** Reforçar a animação relacionada com o deslocamento do ponto, destacando o movimento de aproximação das imagens em consequência do movimento de aproximação dos objetos através da visualização do deslocamento de duas etiquetas, nos dois eixos em simultâneo, que mostrem ambas as aproximações. Comparar a determinação do limite de uma sucessão a partir de procedimentos algébricos com a sua determinação a partir da interpretação gráfica, ou sugerir a construção de uma tabela através das funcionalidades disponíveis na calculadora. **Questões que poderão contribuir para a discussão:** Qual o domínio da função? A sucessão/função é monótona crescente, decrescente ou constante no seu domínio? A sucessão/função é limitada? Como poderei determinar a variação dos valores das imagens correspondentes à respetiva variação dos objetos (poderei sugerir a construção de uma tabela de valores)? Esta expressão algébrica corresponde a que tipo de função (atenção aos termos de maior grau)? Que parâmetros da expressão algébrica podem ajudar a identificar características do gráfico (declive, coeficiente diretor, vértice da parábola, ordenada na origem, assintotas verticais e horizontais)? **Dificuldades dos alunos:** Podem não perceber a proximidade de significado dos termos que derivam dos conceitos de aproximação, convergência e tendência. **Papel do professor:** Apontar para a proximidade de significado destes termos e das suas variantes através da sua utilização na interpretação do limite nas diversas representações gráficas. **Atenção especial:** A utilização do termo convergência, ou de alguma das suas variantes, não faz sentido quando nos referirmos a valores infinitos, já que esta noção pressupõe a aproximação a algo de concreto, ou seja, raciocinando matematicamente, a aproximação a um valor real.	20 min
3) Trabalho autónomo dos alunos: realização de uma tarefa exploratória em grupos de dois.	45 min

	Apresentação da tarefa: Explicar aos alunos que devem realizar a tarefa a pares (com o colega de carteira habitual) e que terão cerca de 45 minutos para a resolver. A resolução deve ser entregue ao professor no final da aula (serão devolvidas na aula seguinte). A tarefa deve ser resolvida na folha que contém o enunciado e todos os gráficos obtidos na calculadora devem ser transcritos para a folha da tarefa. Na resolução da tarefa, os alunos devem usar caneta e devem fazer a correção no caderno ou apenas num dos conjuntos de folhas que contém o enunciado (serão entregues dois conjuntos a cada par). O outro conjunto será recolhido pelo professor no final da fase de trabalho autónomo ou no final da discussão coletiva (se os alunos assumirem previamente que não efetuarão alterações na sua resolução durante a fase de discussão).	5 min
	Monitorização do trabalho dos alunos: Enquanto os alunos resolvem a tarefa, o professor vai circular entre os alunos de maneira a acompanhar o trabalho realizado por cada par de alunos e a esclarecer pequenas dúvidas. Deste modo, consegue ficar com uma noção sobre as questões e dificuldades que foram sendo levantadas, assim como do progresso de cada grupo de alunos na tarefa, e selecionar as resoluções que considerar mais adequadas aos propósitos da discussão final em grupo-turma. Assim, o professor pode incentivar os pares, que estiverem bloqueados nalguma questão, a desenvolver o seu raciocínio de outra forma ou a explorar outros caminhos e, relativamente aos pares que terminarem mais cedo, a aprimorar e tornar mais sofisticadas as suas respostas. O professor deve intervir sem certificar ou corrigir explicitamente o que os alunos estiverem a fazer. Perante as dúvidas dos alunos, o professor vai apresentar uma série de questões com o intuito de ajudar cada grupo a organizar, expressar e clarificar os raciocínios desenvolvidos, a menos que estas dúvidas sejam evidenciadas por vários grupos. Neste caso, o professor vai ter de colocar todo o grupo turma a par de tais dúvidas (trazendo-as para o quadro) e estimular os próprios alunos a esclarecê-las. Se as dúvidas levantadas persistirem, o professor poderá ter de reduzir o nível de dificuldade da tarefa. **Resolução da tarefa:** **Questão 1: a_1 e a_2.** **Resolução possível:** a_1) é falsa. **Justificação:** A partir da interpretação da representação gráfica da função *f* (*x*), dado que quando $x \to +\infty$, $f(x) \to -\infty$, então alínea a_1 é falsa, pois, pela noção de limite, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. **Também pode ser respondido:** como o gráfico de *f* (é uma função afim) corresponde a uma reta com declive negativo, então a_1 é falsa, porque, como a reta é decrescente, quando $x \to +\infty$, $f(x) \to -\infty$. a_2) é falsa. **Justificação:** A partir da interpretação da representação gráfica da função *f* (*x*), dado que quando $x \to -\infty$, $f(x) \to +\infty$, então alínea a_1 é falsa, pois, pela noção de limite, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. **Também pode ser respondido:** como o gráfico de *f* corresponde a uma reta com declive negativo, então a_1 é falsa, porque, como a reta é decrescente, quando $x \to -\infty$, $f(x) \to +\infty$. **Dificuldades dos alunos:** Os alunos podem não perceber como obter uma representação gráfica de *f* **(esta dificuldade também pode aparecer nas alíneas b e c).** **Papel do Professor:** Sugerir que a representação gráfica de uma função pode ser obtida a partir dos conhecimentos sobre funções ou através da calculadora gráfica Em princípio a maior parte dos alunos já deve saber utilizar as funções da máquina de forma a obter um gráfico ou tabela, mas, em caso contrário, fornecer ao grupo que mostrar ter dúvidas as instruções necessárias para obter o gráfico de uma função ou a construção de uma tabela. **Dificuldades dos alunos:** Como a expressão de *f* tem denominador, os alunos podem não reconhecer que *f* corresponde a uma função afim ou que o seu gráfico é uma reta de declive negativo. **Papel do Professor:** Será que *f* corresponde a uma função racional? Questionar sobre qual é o grau do numerador e do denominador da função *f*? Será possível simplificar a expressão da função ou, pelo menos, modifica-la? Que tipo de funções têm uma expressão $y = mx + b$? Que tipo de gráfico corresponde a uma função afim? Que significado tem o valor do coeficiente do termo *mx*?	40 min

Dificuldade dos alunos: Não conseguem interpretar o limite da função através da leitura do gráfico porque ainda não compreendem o limite como uma dupla aproximação que resulta da correspondência entre valores de x e de y. Por isso respondem que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Papel do professor: Questionar se não é possível estabelecer uma relação entre objetos e imagens através da expressão algébrica de uma função? Quando os valores de x variam, isto terá de corresponder, ou não, a uma variação de valores de y idêntica à de x? Esta variação dependerá, ou não, da expressão algébrica da função? Quando os valores de x se aproximam de um determinado valor, isto obrigará que os valores de y tenham o mesmo tipo de aproximação, ou poderão aproximar-se de outros valores?

Questão 1: b_1 e b_2.

Resolução possível: b_1 é verdadeira. A partir da interpretação da representação gráfica da função *g* , dado que quando $x \to +\infty$, $g(x) \to +\infty$, então alínea b_1 é verdadeira, pois, pela noção de limite $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Também pode ser respondido (apesar de só ter sido falado relativamente ás sucessões): Dado que a expressão analítica de *g* corresponde a uma divisão de polinómios em que o numerador possui maior grau que o denominador, então $g(x) \to +\infty$, porque o polinómio do numerador cresce mais rapidamente do que o do denominador e $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$.

b_2 é falsa. A partir da interpretação da representação gráfica da função *g* , dado que quando $x \to -\infty$, $g(x) \to -\infty$, então alínea b_2 é falsa, pois, pela noção de limite $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

Apesar desta tarefa ter sido pensada para ser realizada a partir de uma exploração gráfica a fazer com a calculadora, também pode ser respondido (apesar de só ter sido falado relativamente ás sucessões): Dado que a expressão analítica de *g* corresponde a uma divisão de polinómios em que o numerador possui maior grau que o denominador, então $g(x) \to -\infty$, porque o polinómio do numerador cresce mais rapidamente do que o do denominador e $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{(-y)^2}{-y} = \lim_{y\to+\infty} -y = -\infty$.

Os alunos também podem fazer a divisão obtendo a expressão $f(x) = x - 1/x$, e de seguida pensar que $\lim_{x\to-\infty} \left(x - \frac{1}{x}\right) = -\infty$, porque corresponde à soma de um infinitamente grande com um infinitésimo.

Dificuldades dos alunos: A partir da expressão algébrica de *f* , os alunos podem não reconhecer que tipo de gráfico corresponde à função *f* . Esta dificuldade também pode surgir se o aluno modificar a expressão da função porque optou por proceder à divisão dos polinómios.

Papel do professor: Questionar se, face aos conhecimentos adquiridos, será possível prever qual será a representação gráfica de todas as funções racionais, se nos basearmos apenas na expressão algébrica (apresentar exemplos em que a divisão de dois polinómios ora dá uma reta ora dá uma hipérbole, etc. com a intenção do aluno extrapolar essa dificuldade para o caso em questão)? Não existirá outra forma de obter o gráfico de uma função?

Questão 1: c_1 e c_2.

Resposta: c_1 e c_2 são verdadeiras: A partir da interpretação da representação gráfica da função *h*, dado que quando $x \to \pm\infty$, $h(x) \to 0$, então alíneas c_1 e c_2 são verdadeiras, pois, pela noção de limite, $\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$

Também pode ser respondido (apesar de só ter sido falado nas aulas relativamente ás sucessões): Dado que a expressão analítica de *h* corresponde a uma divisão de polinómios em que o numerador possui menor grau que o denominador, então $h(x) \to 0$, porque o polinómio do numerador cresce menos rapidamente do que o do denominador e $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ (o inverso de um infinitamente grande é um infinitésimo) e o mesmo acontece quando $x \to -\infty$.

Os alunos podem proceder à factorização dos polinómios e simplificar a expressão de *f* : $f(x) = \frac{1}{x-1} \wedge x \neq -1$, e assim perceber que $h(x) \to 0$, quando $x \to \pm\infty$.

Dificuldades dos alunos: A partir da expressão algébrica de *f*, ou da sua simplificação, os alunos podem não reconhecer que tipo de gráfico corresponde à função *f*.
Papel do professor: Questionar se, face aos conhecimentos adquiridos, será possível prever qual será a representação gráfica de todas as funções racionais, se nos basearmos apenas na expressão algébrica (apresentar exemplos em que a divisão de dois polinómios ora dá uma reta ora dá uma hipérbole, etc. com a intenção do aluno extrapolar essa dificuldade para o caso em questão)? Não existirá outra forma de obter o gráfico de uma função?
Papel do professor: Contudo, face aos conhecimentos adquiridos, se os alunos simplificarem a expressão deveriam de reconhecer que *f* corresponde a uma função racional cujo gráfico é uma hipérbole que não está definida em $x = -1$ (o gráfico pode apresentar uma reta assintota com equação $x = -1$). Neste caso, aludir à expressão $y = a + b/(x\text{-}c)$ e questionar os alunos que tipo de gráfico e que características desse gráfico podem ser retiradas dos parâmetros a e c.
Questão 2:

a) **Resoluções possíveis:** Por exemplo, pode ser uma reta de declive positivo ou um polinómio de grau 3 em que o coeficiente diretor é positivo, ou qualquer gráfico que represente $g(x)\to-\infty$ quando $x\to-\infty$ e $g(x)\to+\infty$ quando $x\to+\infty$.

Dificuldades dos alunos: Os alunos podem não entender que não precisam de fornecer uma expressão algébrica da função cujo gráfico têm de representar (esta dificuldade mantém-se nas outras alíneas).
Papel do professor: Questionar, face ao enunciado da pergunta 2, se será mesmo necessário saber qual é a expressão da função? O gráfico de uma função corresponde a uma expressão, certo? No entanto, correspondem, ou não, a diferentes representações de uma função?
Dificuldades dos alunos: Por outro lado, podem ter problemas na representação do gráfico porque, na ausência da expressão algébrica, podem não conseguir traduzir para o gráfico as informações fornecidas na questão (esta dificuldade mantém-se nas outras alíneas).
Papel do professor: Quando identificamos o limite de uma função quando x tende para mais infinito (o mesmo para menos infinito) estamos a identificar uma tendência para os valores de x ou de y? Se usarmos os eixos do referencial, que zona do eixo dos x corresponde $x \to +\infty$ (o mesmo sobre $x \to -\infty$)? E, tomando em consideração o valor indicado para o limite, para onde tendem as imagens destes objetos? A representação gráfica de uma função pretende traduzir que tipo de correspondência?
Dificuldades dos alunos: Então e o resto do gráfico da função? Sem mais informação não consigo representá-la? (esta dificuldade mantém-se nas outras alíneas).
Papel do professor: Além da informação fornecida pelos limites sobre o que se passa com as imagens quando x tende para infinito, quando é que seria preciso ter mais alguma informação sobre o resto da função (marcar zeros, extremos, assintotas, etc)? Neste caso, não será possível fazer um esboço sem ter essas informações? Seria ou não possível cada aluno obter uma representação gráfica diferente? Os limites, quando *x* tendem para infinito, podem ser observados a partir de que zonas do referencial?

b) **Resoluções possíveis:** Por exemplo, pode ser uma parábola com concavidade voltada para baixo ou qualquer gráfico que represente $h(x)\to-\infty$ quando $x\to-\infty$ e $h(x)\to-\infty$ quando $x\to+\infty$.

c) **Resoluções possíveis:** Por exemplo, pode ser o gráfico de uma função racional em que o grau do polinómio denominador é igual ao grau do polinómio numerador e os coeficientes diretores de ambos os polinómios também são iguais, ou qualquer gráfico que represente $i(x)\to1$ quando $x\to-\infty$ e $i(x)\to1$ quando $x\to+\infty$.

Questão 2.1

a) **Resolução possível:** Verdadeira, por exemplo o gráfico de $f(x) = -x^3$ respeita os limites indicados.

Dificuldades dos alunos: Os alunos podem não reconhecer o gráfico de uma função cúbica.
Papel do professor: Relembrar uma tarefa do ano passado, onde o gráfico das funções polinomiais de grau 3 era relacionado com o comportamento de um nadador de mariposa (cima, baixo, cima).
Dificuldades dos alunos: Os alunos podem considerar que todas as funções cúbicas têm um comportamento semelhante a $f(x) = x^3$.
Papel do professor: Questionar de que forma pode ser escrita uma expressão geral de um polinómio de grau 3? Poderá ser $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$? Que significado pode ser atribuído ao parâmetro *a*? Se os alunos não se lembrarem, evocar a expressão geral de um

polinómio de grau 2 ou 1 e perguntar que indicações podem ser retiradas sobre a função a partir do coeficiente do termo de maior grau. **b) Resolução possível:** Falsa, por exemplo o gráfico de $f(x) = -x^2$ respeita os limites indicados. **Dificuldades dos alunos:** Os alunos podem não reconhecer o gráfico das funções quadráticas. **Papel do professor:** Questionar que funções têm um gráfico que corresponde a uma parábola? Como é o formato de uma parábola? Quando é que uma parábola tem a concavidade voltada para cima? E para baixo? **c) Resolução possível:** Falsa, porque se transformarmos a expressão de forma o obter uma expressão equivalente a $y = a + \frac{b}{x}$ ficamos a perceber que a função tem uma assintota horizontal $y = -1$, tanto para $x \to -\infty$ como para $x \to +\infty$. **Dificuldades dos alunos:** Podem se enganar nos cálculos algébricos ou não usar a calculadora para obter a representação gráfica da função. **Questão 3** **a) Resolução possível:** $\lim_{x\to+\infty}[4000 - (x - 10500)^2] = -\infty$, pois a expressão algébrica corresponde a uma de parábola em que o coeficiente do termo de maior grau é negativo, logo $[4000 - (x - 10500)^2] \to -\infty$ quando $x \to +\infty$. **Dificuldades dos alunos:** Não reconhecendo que a expressão corresponde a uma função de grau 2, os alunos podem não reparar que precisam de ter cuidado com os valores a atribuir na janela gráfica e não obter uma representação gráfica que lhes permita tirar as conclusões. **Papel do professor:** Que tipo de gráfico representa a expressão da alínea a)? Que tipo de função corresponde a tal expressão? Que ponto pode ser fundamental para obter um gráfico representativo desta expressão? Além da representação gráfica que outra forma de representar a correspondência entre valores de x e y pode ser utilizada? **Dificuldades dos alunos:** Reconhecendo que a expressão corresponde a uma função de grau 2, os alunos podem não obter uma representação gráfica que lhes permita tirar as conclusões. **Papel do professor:** Será mesmo necessário representar graficamente a função para identificar o comportamento gráfico desta função? Qual é o sinal do coeficiente do termo de maior grau? Que significado pode acarretar para o gráfico da função? **b) Resolução possível**: Não existe limite, porque quando $x \to +\infty$, $\frac{x}{\sin(2x)} \to \pm\infty$, ou seja $\frac{x}{\sin(2x)}$ torna-se oscilante entre $-\infty$ e $+\infty$. **c) Resolução possível**: $\lim_{x\to-\infty}(\frac{\cos 2x}{x}) = 0$, pois pela leitura da representação gráfica quando $x \to -\infty$, $\frac{\cos 2x}{x} \to 0$. Também pode ser dito que, como $\frac{\cos 2x}{x} = \cos(2x) \times \frac{1}{x}$, então o produto de uma função limitada ($\cos 2x$) por um infinitésimo ($\frac{1}{x}$) continua a ser um infinitésimo. **Dificuldades dos alunos:** A partir das expressões algébricas das alíneas b) e c) , os alunos podem não reconhecer a que tipo de gráficos correspondem. Por outro lado, como ambas as expressões incluem um fator trigonométrico, os alunos podem pensar que nas duas expressões o comportamento é idêntico. **Dificuldades dos alunos:** O comportamento sinusoidal típico das funções trigonométricas pode causar problemas na interpretação gráfica das duas expressões das alíneas b e c. **Papel do professor:** Incentivar que os alunos utilizem a máquina de calcular para interpretar graficamente o limite de ambas as expressões. Será possível identificar dois ou mais limites, quando x tende para mais infinito ou para menos infinito? **Papel do professor:** Mesmo que os alunos identifiquem o valor dos limites destas duas alíneas a partir de procedimentos algébricos, encorajar os alunos para tentarem identificar estes limites a partir da leitura gráfica. **Extensão da tarefa: Se for possível, identifique os seguintes limites:** $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}$ ***e*** $\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ **4) Apresentação e discussão de resoluções:** Durante a fase de monitorização, detetar os pares de alunos que tenham optado pelas **resoluções que privilegiaram a representação e interpretação gráfica**, porque serão as resoluções que preferencialmente serão apresentadas no quadro. No entanto, se algum par optou por algum dos procedimentos	 20min

algébricos referidos nas resoluções alternativas, principalmente quando dizem respeito a funções racionais, deverei pedir a esse par que explique como procedeu ou, no mínimo, fazer uma breve referência sobre a correção dessas resoluções.
A discussão decorrerá da seguinte forma:
- Em cada questão, selecionarei um par de alunos para registar no quadro a sua resolução, tendo em conta os seguintes critérios:
Questões1 e 3: Selecionar dois pares de alunos que tenham uma resolução com poucas incorreções, de preferência nas alíneas **1c)** ou **1b)** e na alínea **3a)** ou **3b)**, e que tenham baseado as suas repostas na interpretação da representação gráfica (um par para cada questão). A estratégia passa por pedir aos alunos que expliquem as suas opções e apresentem as justificações, questionando os alunos sobre o processo de dupla aproximação entre os valores de y em correspondência com os de *x* e sobre algumas das características das funções que ajudaram ou poderiam ter ajudado os alunos na argumentação.
Na **questão3** e no caso de algum par ter seguido a estratégia de encontrar pontos particulares (vértice da parábola, por exemplo), dever-se-á chamar esse par ao quadro para se discutir a eficácia deste método, ou então um par que tenha usado com alguma frequência a representação tabelar.
Questão 2: Selecionar um par de alunos que tenha optado por representar graficamente funções que respeitavam os limites desejados, mas que seriam difíceis de definir por uma expressão analítica. Após cada alínea dar voz a outros pares que possam apresentar outros formatos gráficos, como retas, parábolas, funções racionais, etc., pensando no gráfico de funções já estudadas. Deve discutir-se a questão do domínio da função e da necessidade do estudo dos limites ter de ser coerente com o domínio.
Questão 2.1: Caso haja algum par que tenha seguido a estratégia de encontrar funções particulares, dever-se-á chamar esse par ao quadro para se discutir a eficácia deste método. Questionar em que medida as características dos gráficos das funções referidas, tais como a simetria das parábolas, a monotonia das retas ou o conhecimento das assimptotas horizontais, pode contribuir para a identificação do limite dessas funções.
Tentar obter dos alunos um discurso claro e coerente dando eco a algumas das respostas dadas. Procurar que os dois alunos intervenham.
Durante este processo, promover a discussão e procurar outros intervenientes integrando algumas questões para o grupo turma*: Concordam todos com aquilo que foi apresentado ou explicado? Alguém tem algo a acrescentar? Alguém pensou de outra forma ou tem outra resposta? Querem colocar alguma questão aos vossos colegas? Alguma dúvida que os vossos colegas possam explicar?*
Por vezes pedir que um par, especificamente, explique porque não concorda com os colegas, sabendo que esse par resolveu utilizando outras estratégias, por exemplo a partir do conhecimento de características da função, ou por procedimentos algébricos, ou com recursos a tabelas, etc.
Finalmente, escrever, com a ajuda dos alunos, a seguinte síntese:
As assintotas horizontais refletem o valor dos limites de uma função quando x tende para infinito: $y = a \text{ é } assintota\ horizontal\ f(x)\ se\ e\ só\ se\ \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a.$
As funções racionais tendem para 0 quando o grau do denominador é maior que grau do numerador e tendem para infinito quando o grau do numerador é maior que do denominador. Quando denominador e numerador têm o mesmo grau, a função tende para o valor que resultar da divisão dos coeficientes dos termos de maior grau: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_nx^0}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_nx^0} = \frac{a_0x^n}{b_0x^n} = \frac{a_0}{b_0}$.
As funções de grau 2 são simétricas assim, quando x tende para mais ou menos infinito, f(x) tende para $+\infty$ nos dois casos, se coeficiente do termo de grau 2 tiver sinal positivo; ou $f(x) \to -\infty$ quando $x \to \pm\infty$, se coeficiente do termo de maior grau tiver sinal negativo
.
Sendo f(x) uma função afim, se o termo de grau 1 tiver coeficiente positivo então f(x) é monótona crescente e $f(x) \to +\infty$ quando $x \to +\infty$, ou $f(x) \to -\infty\ quando\ x \to -\infty$; Se, pelo contrário, tiver coeficiente negativo então a função é monótona decrescente e quando $x \to -\infty, f(x) \to +\infty$, tal como quando $x \to +\infty, f(x) \to -\infty$.

Avaliação

Avaliação qualitativa de atitudes e valores a partir da observação dos alunos em aspetos como:

- Colaboração entre colegas, empenho e respeito pelas intervenções dos colegas e professor;
- Diálogo com os alunos e professor (participação e pertinência das questões levantadas e das respostas dadas);

Avaliação reguladora das aprendizagens, centrada na monitorização do trabalho autónomo e colaborativo e no questionamento dos alunos que incidirá sobre os seguintes aspetos:

- Feedback oral do professor às resoluções da tarefa e às representações gráficas obtidas;
- Identificar as dificuldades dos alunos na realização da tarefa e na estrutura argumentativa das suas explicações e justificações.

U LISBOA | ie Instituto de Educação

Plano de aula
27 de março de 2019

2018/2019 Escola Secundária de Camões

2ª aula	Secundário – 11º ano	Tempo: 90 minutos

Domínio: Funções reais de variável real.
Tópico: Limites segundo Heine de funções reais de variável real.
Subtópicos: Aderência ao domínio de uma função real de variável real e definição de limite segundo Heine.

Sumário: Definição de ponto aderente a um conjunto e definição de limite de uma função segundo Heine. Realização de uma tarefa de exploração: "*Vamos investigar a definição de limite segundo Heine*".

Objetivos de aprendizagem

- Mobilizar conhecimentos prévios de limites de sucessões e de funções reais de variável real;
- Representar e interpretar gráficos e tabelas, com o recurso à calculadora;
- Reconhecer pontos aderentes ao domínio de uma função como pontos candidatos ao estudo do limite de uma função e a partir de definição prevista no Programa de Matemática A;
- Compreender a definição de limite de uma função segundo Heine a partir da variação dos valores dos termos de duas sucessões (u_n e $f(u_n)$);
- Identificar o limite de uma função quando x tende para um valor real ou infinito a partir da definição de limite segundo Heine, prevista no programa de Matemática A;
- Conjeturar, justificar e provar resultados.

Capacidades transversais

- Relacionar representações gráficas, tabelares e algébricas;
- Argumentação matemática;
- Comunicação matemática;
- Trabalho colaborativo.

Conhecimentos prévios

- Interpretar graficamente o limite de uma sucessão (casos de convergência e de limites infinitos);
- Interpretar intuitivamente o limite de sucessões a partir dos valores registados numa tabela;
- Simplificar a expressão algébrica de uma função.

Recursos

- Projetor: Projeção de gráficos de funções realizados previamente com o Geogebra;
- Manual escolar;
- Quadro branco e marcador;
- Tarefa de exploração: "*Vamos investigar a definição de limite segundo Heine*";
- Calculadora gráfica.

Metodologia de trabalho

- Discussão de tópicos sobre domínios, pontos aderentes ao domínio e limites de funções a partir da projeção dos gráficos de funções reais de variável real e resolução de exercícios do manual com o grupo turma;
- Trabalho autónomo e colaborativo (em grupos de dois) dos alunos: realização de uma tarefa de exploração que requer a aplicação das funcionalidades da calculadora gráfica;
- Monitorização do trabalho autónomo;
- Apresentação de resoluções de alunos e discussão coletiva em torno das mesmas.

Momentos da aula	
1) Início da aula e registo do sumário;	5 min
2) Continuação da discussão acerca das resoluções possíveis da tarefa da aula anterior;	15 min
3) Discussão de tópicos relacionados com a definição de limite segundo Heine, a partir da interpretação do gráfico de funções com o grupo turma;	20 min
4) Trabalho autónomo (pares de alunos);	30 min
5) Apresentação e discussão, em grande grupo, de resoluções de alunos;	20 min
Nota: o trabalho autónomo, seguido da apresentação e discussão de resoluções, pode ser dividido em duas fases aproximadamente de 25min (trabalho autónomo 15min/ discussão 10min). No caso de a maior parte dos pares demonstrarem evidentes dificuldades em desenvolver a tarefa, principalmente durante a questão 2, levar a resolução para o quadro branco iniciando o primeiro momento de discussão coletiva antes dos alunos resolverem a questão 3. Por outro lado, se o momento que antecede o trabalho autónomo demorar mais 10-15 min do que o previsto, resolver parte da tarefa em conjunto com os alunos (questões 1 e 2), deixando somente a questão 3 para um momento de trabalho autónomo, a desenvolver em grupos de dois alunos.	

Desenvolvimento da aula e estratégias a implementar	Tempo
1) Organização da sala de aula e registo do sumário.	5 min.
2) Continuação da discussão coletiva acerca das resoluções da tarefa da aula passada: O professor questiona os alunos de modo a incentivá-los a participar criticamente e a apresentar propostas de possíveis percursos resolutivos (apresentados no plano anterior). Fazer a síntese prevista no plano anterior.	15 min
3) Discussão de tópicos em grande grupo: Na aula anterior já tinha sido visto que a interpretação do limite de uma função quando os valores de *x tendem para mais ou menos infinito* era uma forma de estudar o comportamento de uma função para valores de x cada vez maiores ou menores. Ou seja, uma forma de ver para onde tendem os valores das imagens quando os valores dos objetos tendem para valores infinito. **Questionar o grupo turma:** Faz sentido estudar o comportamento de uma função quando o valor de *x* se aproxima ou tende para um valor real? Se o valor de x for um valor do domínio de $f(x)=\frac{x}{x-2}$ (mostrar gráfico da função no Geogebra), por exemplo $x=0$, qual é o comportamento das imagens correspondentes aos objetos pelos quais nos aproximamos desse valor? Os valores das imagens tendem para que valor se me aproximar de x=0 pela esquerda? E pela direita? Então existirá o limite da função quando os valores de x se aproximam de 0? Qual será o valor de $\lim_{x\to 0} f(x)$? E relativamente a um valor que não pertence ao domínio da função? Ou seja, quando no aproximamos de x=2? Qual é o comportamento da função quando a aproximação de x=2 é feito pela esquerda ou por valores inferiores? E quando é feito pela direita, ou por valores superiores? Neste caso existirá limite? Mas, faz ou não sentido investigar o limite para x=2? Por exemplo, se a função fosse $g(x)=1+\frac{2}{(x-2)^2}$ (mostrar o gráfico da função no Geogebra) existiria ou não limite quando os valores de x tendem para 2? Se a aproximação for feita por valores à esquerda, para onde tendem os valores das imagens? E se for realizada pela direita? Então $\lim_{x\to 2} f(x)=$? **Identificar o conjunto de pontos que poderíamos considerar como pontos candidatos à existência de limite nas duas funções para passar a denominá-los por conjunto de pontos aderentes aos domínios de *f* e *g*.** **Dificuldades dos alunos:** Podem confundir o domínio da função com o conjunto dos pontos aderentes (aderência do domínio). **Papel do professor:** Questionar se o domínio tem de ser igual ao conjunto aderência? Explicitar quais são os conjuntos correspondentes ao domínio da função estudada e à aderência do domínio, mostrando desta forma que podem ser conjuntos diferentes. Depois, apresentar as seguintes definições, garantidas pela última proposição:	20 min

▮ Dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, diz-se que a é **"ponto aderente a A"** quando existe uma sucessão (x_n) de elementos de A tal que $\lim x_n = a$. ▮ Ao conjunto dos pontos aderentes a A dá-se o nome de **aderência de A** e representa-se por $\overline{A}$. Se A é um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, mostra-se que existe uma sucessão (x_n) de elementos de A tal que $\lim x_n = a$ se e só se qualquer vizinhança $V_\delta(a)$ interseta A. A partir da representação num referencial cartesiano da variação de valores dos termos de duas sucessões que tendem para um valor real, pretende-se que os alunos identifiquem os pontos aderentes ao domínio da função *f* e se familiarizem com a definição de aderência apresentada. Assim, os alunos poderão observar a partir do deslocamento de um ponto ao longo do eixo das abcissas, que representa a variação de valores dos termos das sucessões, como se obtém a aproximação de um valor real no eixo Ox a partir de uma sucessão. **Continuação da discussão coletiva de tópicos:** Depois, estabelecer uma correspondência entre a aproximação dos valores de *x* do valor $a = \lim u_n$ (u_n é uma sucessão que tende para *a* por valores do domínio da função *f*), que pode ser observada através do deslocamento de um ponto no eixo *Ox*, e a variação de valores de *f(x)*, que poderá ser visualizada pelo deslocamento de um ponto ao longo do gráfico da função *f*. Com isto pretende-se que os alunos verifiquem que o limite de uma função decorre da identificação do valor *y* para o qual as imagens da função se aproximam ou tendem, quando *x* tende para um valor ou para infinito. De seguida, apresentar a definição de limite de uma função segundo Heine: **Definição de limite de uma função segundo Heine** Dada uma função f, real de variável real, sendo a e b números reais, diz-se que b é limite de $f(x)$ quando x tende para a quando a é ponto aderente a D_f e a imagem por f de toda a sucessão (x_n) convergente para a é uma sucessão convergente para b, (ou seja, $\lim(f(x_n)) = b$) e representa-se por $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = b$. **Nota:** A definição continua válida nos casos em que b é infinito. (Há outras definições. Esta está de acordo com o programa em vigor.) O processo de identificação do limite passará, agora, por propor aos alunos que o limite poderá ser determinado a partir de uma dupla aproximação: *quando todas as sucessões u_n tendem para um valor real a ou para infinito* (representando isto a aproximação de *x* de um valor real *a* ou a sua tendência para infinito), *os termos da sucessão $f(u_n)$ também se aproximam, tendem ou convergem para um valor real b ou tendem para infinito* (representando isto a tendência de *f(x)* para um valor real b ou para infinito). Ou seja, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = b \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = b, sendo \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a.$ **Dificuldades dos alunos:** Apesar da visualização do deslocamento de um ponto ao longo do gráfico, os alunos podem não compreender o procedimento de dupla aproximação através do estudo do limite das sucessões u_n e $f(u_n)$, como é estipulado pela definição de limite segundo Heine **Papel do professor:** Reforçar a animação relacionada com o deslocamento dos pontos, destacando o movimento de aproximação das imagens em consequência do movimento de aproximação dos objetos através da visualização do deslocamento de uma etiqueta, no eixo *Oy*. Se necessário, mostrar mais de uma sucessão u_n a tender por valores superiores (ou inferiores) para o mesmo valor *x=a* e que a respetiva sucessão $f(u_n)$ continua a tender para o valor *b*.	
4) Trabalho autónomo dos alunos: realização de uma tarefa exploratória em grupos de dois. **Apresentação da tarefa:** Explicar aos alunos que devem realizar a tarefa a pares (com o colega de carteira habitual) e que terão cerca de 45 minutos para a resolver. A resolução deve ser entregue ao professor no final da aula (serão devolvidas na aula seguinte).	30 min

A tarefa deve ser resolvida na própria folha que contém o enunciado e todos os gráficos obtidos na calculadora devem ser transcritos para a folha da tarefa.
Na resolução da tarefa, os alunos devem usar caneta e devem fazer a correção no caderno ou apenas num dos conjuntos de folhas que contém o enunciado (serão entregues dois conjuntos a cada par). O outro conjunto será recolhido pelo professor no final da fase de trabalho autónomo ou no final da discussão coletiva (se os alunos assumirem previamente que não efetuarão alterações na sua resolução durante a fase de discussão).

Monitorização do trabalho dos alunos:
Enquanto os alunos resolvem a tarefa, o professor vai circular entre os alunos de maneira a acompanhar o trabalho realizado por cada par de alunos e a esclarecer pequenas dúvidas. Deste modo, consegue ficar com uma noção sobre as questões e dificuldades que foram sendo levantadas, assim como do progresso de cada grupo de alunos na tarefa, e selecionar as resoluções que considerar mais adequadas aos propósitos da discussão final no grupo turma.
Assim, o professor pode incentivar os pares, que estiverem bloqueados nalguma questão, a desenvolver o seu raciocínio de outra forma ou a explorar outros caminhos e, relativamente aos pares que terminarem mais cedo, a aprimorar e tornar mais sofisticadas as suas respostas. O professor deve intervir sem certificar ou corrigir explicitamente o que os alunos estiverem a fazer.
Perante as dúvidas dos alunos, o professor vai apresentar uma série de questões com o intuito de ajudar cada grupo a organizar, expressar e clarificar os raciocínios desenvolvidos, a menos que estas dúvidas sejam evidenciadas por vários grupos. Neste caso, o professor vai ter de colocar todo o grupo turma a par de tais dúvidas (trazendo-as para o quadro) e estimular os próprios alunos a esclarecê-las. Se as dúvidas levantadas persistirem, o professor poderá ter de reduzir o nível de dificuldade da tarefa.
No quadro dos momentos da aula, apresentado atrás, são estipulados algumas critérios definidores da estratégia a seguir.
Resolução da tarefa:
Questão 1.1:

n	u_n		n	v_n
1	3		1	-8
5	2.2		5	1.6
10	2.1		10	1,9
50	2.02		50	1.996
100	2.01		100	1.999
1000	2.001		1000	1,99999

Dificuldades dos alunos: Podem apresentar os valores sujeitos a uma aproximação estabelecida pelos alunos, por exemplo às décimas.
Papel do professor: Questionar os alunos sobre o título da tarefa e os objetivos possivelmente associados e se apresentar os valores aproximados à décima parece ser um procedimento adequado à determinação de limites? A identificação de um limite está relacionada com a aproximação a um valor ou com uma tendência apresentada por uma sequência infinita de valores? Será adequado alterar os valores obtidos de maneira a obtê-los com o mesmo número de casa decimais?
Dificuldades dos alunos: Podem ter problemas no preenchimento da tabela já que podem não saber usar a calculadora de modo a inserir apenas os valores de x desejados ou não saber inserir a expressão da sucessão na tabela.
Papel do professor: Fornecer as instruções necessárias ao par com problemas. Se verificar que esse problema é comum a grande parte da turma, interromper a tarefa e fornecer as instruções a toda a turma.
Questão 2.1:

n	u_n	$f(u_n)$		n	v_n	$f(v_n)$
1	3	5		1	-8	-17
5	2,2	3,4		5	1.6	2,2
10	2,1	3,2		10	1,9	2,8
50	2,02	3,04		50	1,996	2,992
100	2,01	3,02		100	1,999	2,998
1000	2,001	3,002		1000	1,99999	2,99998

Dificuldades dos alunos: Além dos problemas já referidos no ponto 1.1, os alunos podem revelar problemas com o preenchimento das colunas $f(u_n)$ *e* $f(v_n)$ porque não entendem o que têm de fazer.

Papel do professor: Questionar os alunos se é preciso determinar a expressão da sucessão $f(u_n)$ para preencher a tabela? Por exemplo, na primeira tabela, quando *n = 1,* $u_1 = 3$, portanto nesta tabela como poderei preencher o espaço correspondente a $f(u_n)$ *quando* $n = 1$? Se necessário reduzir o nível de desafio da tarefa e perguntar se isso não passará por ter de achar $f(u_1)$, continuando a fazer as correspondências adequadas entre os valores de n, u_n e $f(u_n)$ nas outras linhas?

No entanto, se algum par de alunos considerar que é melhor determinar a expressão de $f(u_n)$, o professor deverá incentivar esse cálculo porque, provavelmente, pode ser um processo mais rápido para obter os valores adequados ao preenchimento da tabela através da máquina.

Dificuldades dos alunos: Podem revelar problemas em obter uma expressão de $f(u_n)$ *e de* $f(v_n)$.

Papel do professor: Questionar o que é preciso fazer para, por exemplo, determinar *f(3)*? Então e para determinar $f(u_n)$ *ou* $f(v_n)$? Questionar se não é possível usar uma expressão mais simples de *f(x)*? Como posso simplificar a expressão duma função racional, antes de substituir x pelo termo geral das sucessões? Relembrar que o processo de factorização pode ser utilizado com esse fim, se for necessário reduzir o nível de desafio.

Questão 2.1.1: primeira resolução

$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = 3$ *e* $\lim_{n\to+\infty} f(v_n) = 3$, tomando em consideração os valores da tabela, já que quando $n \to +\infty, f(u_n) \to 3$.

Resolução alternativa: Após simplificar a expressão da função *f*, $f(x) = 2x - 1 \wedge x \neq 2$, posso utilizar a definição de limite segundo Heine para determinar $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$ *e* $\lim_{n\to+\infty} f(v_n) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = 3$.

Segunda resolução alternativa: $f(u_n) = 2\left(2 + \frac{1}{n}\right) - 1 = 3 + \frac{2}{n}$, logo $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = 3$, já que $2.\frac{1}{n} \to 0$; $f(v_n) = 2\left(2 - \frac{10}{n^2}\right) - 1 = 3 - \frac{20}{n^2} = 3$ já que $\frac{20}{n^2} \to 0$.

Terceira resolução: Se a expressão de *f não for simplificada,* $f(u_n) = \frac{3n^2+2n}{n^2} = 3 + \frac{2}{n}$, logo $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = 3$; $f(v_n) = \frac{30n^4 - 200n^2}{10n^4}$, logo $\lim_{n\to+\infty} f(v_n) = 3$

Dificuldades dos alunos: Podem não entender que os valores de tabela de $f(u_n)$ *e* $f(v_n)$ tendem ambos para 3.

Papel do professor: Questionar se os alunos não observam nenhuma tendência nos valores tabelados das sucessões $f(u_n)$ *e* $f(v_n)$, quando os valores de n tendem para mais infinito? Ou seja, será que esses valores não se aproximam de um valor, quando n tende para mais infinito?

Dificuldades dos alunos: Podem não entender que $f(u_n)$ *e* $f(v_n)$ correspondem a duas sucessões?

Papel do professor: A identificação dos valores correspondentes $\lim f(u_n)$ *e* $\lim f(v_n)$ correspondem ao limite de duas sucessões, ou não? $f(u_n)$ *e* $f(v_n)$ são funções de variável real? Ou são funções de variável natural? Sendo assim, para onde tem de tender os valores de *n* para determinar os limites pedidos na pergunta?

Dificuldades dos alunos: Podem ter problemas com a determinação dos termos gerais de ambas as sucessões?

Papel do professor: Questionar o que é preciso fazer para, por exemplo, determinar *f(3)*? Então e para determinar $f(u_n)$ *ou* $f(v_n)$? Questionar se não é possível usar uma expressão mais simples de *f(x)*? Como posso simplificar a expressão duma função racional, antes de substituir x pelo termo geral das sucessões? Relembrar que o processo de factorização pode ser utilizado com esse fim, se for necessário reduzir o nível de desafio.

Questão 2.1.2:

Resolução: Dado que existem sucessões $u_n \to 2$ *e* $v_n \to 2$, *tais que* $f(u_n) \to 3$ *e* $f(v_n) \to 3$, então a afirmação é falsa, pois, se existir limite de *f(x)* quando $x \to 2$, pela definição de limite segundo Heine é garantido que o valor deste limite não poderia ser diferente de 3.

Resolução alternativa: Se determinar uma expressão simplificada de $f(x)$ pode mostrar-se que para todas as sucessões x_n que tendem para 2, por valores do domínio de f, $f(x_n) \to 3$; então assim posso afirmar que a afirmação é falsa pois $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$, porque, com base na definição de limite segundo Heine tenho garantia deste resultado.

Mostrar que para todas as sucessões $x_n \to 2$ *por valores do domínio de* f, $f(x_n) \to 3$:

Sendo $f(x) = \frac{2x^2-5x+2}{x-2} = 2x - 1 \wedge x \neq 2$, primeiro, pensemos em todas as sucessões $x_n \to 2^+$e verificamos que $f(x_n) \to 2.2^+ - 1 \to 3^+$; agora, pensemos em todas as sucessões $x_n \to 2^-$ e verificamos que $f(x_n) \to 2.2^- - 1 \to 3^-$; As sucessões $x_n \to 2$ não preciso de verificar porque *x = 2* não pertence ao domínio da função *f.*

Dificuldades dos alunos: Podem não conseguir relacionar os valores de $\lim f(u_n)$ *e de* $\lim f(v_n)$ *com* $\lim_{x\to 2} f(x)$ através da definição de Heine.

Papel do professor: Questionar para onde tendem as sucessões u_n e v_n? E para onde é que tende *x*? E relativamente às sucessões *f(u_n) e f(v_n)*, para onde convergem estas sucessões?

Dificuldades dos alunos: Segundo a definição é necessário saber o que se passa com todas as sucessões que tendem para 2, no entanto só conhecem dois termos gerais de sucessões que tendem para 2, logo podem pensar que não será possível tirar conclusões a partir da definição de Heine.

Papel do professor: Apesar da definição referir todas as sucessões, a partir do momento que sei o comportamento de *f(x_n)*, sendo x_n uma sucessão que, por exemplo, tende para 2^+, então não será preciso conhecer o termo geral de mais nenhuma sucessão u_n que também tenda para 2^+, porque *o comportamento de f(u_n) vai ser igual ao de f(x_n) já que tal apenas dependerá da expressão algébrica de f(x) e não do termo geral das sucessões.*

Portanto, questionar os alunos se será mesmo preciso estudar como se comporta *f(x_n) de* todas as sucessões x_n que tendem para 2^+ (ou para 2^-)? Sugerir que os alunos averiguem isso mesmo investigando *f(x_n)* a partir do termo geral de mais uma ou duas sucessões que tendam para 2^+.

Questão 3.1

n	u_n	$g(u_n)$		n	v_n	$g(v_n)$
1	3	2		1	−8	-6,8
5	2,2	-6,8		5	1,6	7,6
10	2,1	-16,9		10	1,9	22,9
50	2,02	-96,98		50	1,996	502,996
100	2,01	-196,99		100	1,999	2002,999
1000	2,001	-1996,999		1000	1,99999	200002,99999

Dificuldades dos alunos: Idêntico a 2. 1.
Papel do professor: Idêntico a 2. 1.

Questão 3.1.1:
Resoluções: Processos idênticos a 2.1.1, só mudam resultados e expressões.
(Dado que quando $n \to +\infty$, ($u_n \to 2^+$) os valores $g(u_n) \to +\infty$ (segundo a tabela os valores de *g* (u_n) estão sempre a aumentar, não convergindo para nenhum valor real), então $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n) = +\infty$.
Por sua vez, quando $n \to +\infty$, ($v_n \to 2^-$) os valores $g(v_n) \to -\infty$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} g(v_n) = -\infty$.)

Resultados: $\boldsymbol{\lim g(u_n) = -\infty \ e \ \lim g(v_n) = +\infty}$

Expressão simplificada *g(x)*: $\boldsymbol{g(x) = x + 1 - \frac{2}{x-2}}$

Expressão $\boldsymbol{g(u_n) = 2 + \frac{1}{n} + 1 - \frac{2}{2+\frac{1}{n}-2} = 3 - 2n + \frac{1}{n}}$

Expressão $\boldsymbol{g(v_n) = 2 - \frac{10}{n^2} + 1 - \frac{2}{2-\frac{10}{n^2}-2} = 3 - \frac{10}{n^2} + \frac{n^2}{5}}$

Dificuldades dos alunos: Através dos valores da tabela os alunos podem ficar indecisos se o comportamento revelado é suficiente para considerar que $\boldsymbol{\lim g(u_n) = -\infty \ e \ \lim g(v_n) = +\infty}$ **(além das dificuldades referidas em 2.1.1).**

Papel do professor: Questionar se é necessário ambas as sucessões tenderem para o mesmo valor? Por outro lado, será necessário o valor dos termos tenderem para um valor real, ou podem ter outro tipo de tendência, por exemplo, tenderem a aumentar/diminuir de valor infinitamente sem fixarem esse crescimento em torno de um valor real?

Questão 3.1.2:
Resolução: Dado que existem sucessões que tendem para 2 por valores do domínio de *g*, $u_n \to 2^+ e \ v_n \to 2^-$, tais que $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} g(v_n)$ (ou seja, $g(u_n) \to +\infty \ enquanto \ g(v_n) \to -\infty$), então $\lim\limits_{x\to2} g(x)$ não existe, porque, com base na definição do limite segundo Heine, só existe $\lim\limits_{x\to2} g(x)$ se para todas as sucessões x_n que tendem para 2, *g* (x_n) tiver necessariamente o mesmo limite.

Dificuldades dos alunos: Segundo a definição é necessário saber o que se passa com todas as sucessões que tendem para 2, no entanto só conhecem dois termos gerais de sucessões que tendem para 2 mais duas sucessões com limite infinito e podem pensar que não será possível tirar conclusões a partir da definição de Heine.

Papel do professor: E não é possível obter os termos gerais de $g(u_n) \ e \ g(v_n)$? E será mesmo necessário? Ou seja, será necessário conhecer o seu termo geral para identificar para onde tendem as sucessões $g(u_n) \ e \ g(v_n)$? Seria necessário que estas sucessões também convergissem para 2? Que significa estas sucessões terem limite infinito? Que consequências tem segundo a definição?

Dificuldades dos alunos: Podem não conseguir relacionar os valores de $\lim g(u_n) \ e \ de \ \lim g(v_n) \ com \ \lim\limits_{x\to2} g(x)$ através da definição de Heine.

Dificuldades dos alunos: podem apresentar problemas na formulação de um argumento, que pode ser construído a partir dos limites de *g(u_n) e g(v_n)*, $-\infty \ e \ +\infty \ respetivamente$, pois sendo diferentes isso basta para mostrar que $\lim\limits_{x\to2} g(x) \ não \ existe$, já que pela definição de Heine seria necessário que para todas as sucessões que convergem para 2, incluindo, portanto, u_n *e* v_n , se verificasse que $g(u_n) \ e \ g(v_n)$ tivessem o mesmo limite.

Papel do professor: Questionar se leram a definição de Heine novamente? O que diz a definição? É importante que alguma sucessão convirja para 2? Quais? Isso é suficiente para existir limite quando os valores de x tendem para 2?

As sucessões $g(u_n)$ e $g(v_n)$ também convergem para 2? Para onde tendem os valores dos termos destas sucessões? E assim qual o valor de limite da função *g* quando os valores de *x tendem para 2?*

5) **Apresentação e discussão de resoluções:** Durante a fase de monitorização, detetar pares de alunos que tenham optado pelas resoluções que privilegiaram a interpretação das tabelas ou por algum dos procedimentos algébricos referidos nas resoluções alternativas, principalmente se simplificaram a expressão das funções racionais.

20 min

A discussão decorrerá da seguinte forma:
- Em cada questão, selecionarei um par de alunos para registar no quadro a sua resolução, tendo em conta os seguintes critérios:

Questão1: Selecionar um par de alunos que tenham uma resolução sem incorreções. A estratégia passa por pedir aos alunos que expliquem as suas opções**, questionando os alunos sobre alguns dos termos utilizados na questão 1.1.1:** Na última frase posso utilizar o termo *tendem* em vez de *convergem*? E será correto se disser que *os valores dos termos da sucessão tendem para …*? Será que *uma sucessão pode convergir para infinito*? E, se em vez de dizer que *converge para infinito*, disser que *os valores dos termos da sucessão tendem para infinito*? E se em vez de *tendem* usar o termo *aproximam-se de infinito*? E se disser *aproximam-se de um valor real* em vez de dizer *tendem para um valor real*?

Q**uestão2:** Chamar ao quadro um par que não tenha incorreções na tabela, mas se tiverem sido detetadas alguns problemas durante o seu preenchimento fazer uma referência aos métodos mais expeditos para esse efeito. Além deste critério, também deve ser tomado em consideração os dados em que se basearam para responder às questões 2.1.1 e 2.1.2, atribuindo preferência aos pares que partiram da interpretação da tendência dos valores registados na tabela. Na pergunta 2.1.2 selecionar também um par que tenha realizado procedimentos algébricos para vir ao quadro mostrar a sua resolução, depois do primeiro par.

Questionar primeiro par: Pedir para os alunos para exporem o seu raciocínio em torno dos valores da tabela (incentivar os dois alunos a participar) e questionar se fosse acrescentada à tabela um valor de n maior que 1000 o que seria de esperar? Concordam que $\lim g(u_n)$ possa ser traduzido para $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$ se considerarmos que $x \to 2^+$ significa a aproximação dos valores de x a 2 por valores superiores a 2 ou à sua direita? A mesma questão sobre $g(v_n)$ mas desta feita comparando o estudo do seu limite ao estudo $g(x)$ *quando x se aproxima ou tende para* 2 *por valores inferiores ou* à *sua esquerda*?

Poderei ou não garantir que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$? Existe alguma sucessão que convirja para 2 tal que $\lim f(u_n) \neq 3$?

Questionar segundo par sobre processos de simplificação, tenham, ou não, sido utilizados para obter as expressões apresentadas no quadro? Pedir ao resto da turma para ir confirmando ou retificando os vários processos algébricos apresentados.

Questão 3: Selecionar um par de alunos segundo o mesmo critério da questão 2, exceto no que diz respeito à última pergunta 3.1.2, preferindo desta vez um par que, apesar de ter abordado o facto de haver duas sucessões $g(u_n)$ e $g(v_n)$ com limites diferentes, tenha efetuado a prova requerida de forma pouco sólida, isto é, sem que tenha havido um esforço para construir uma argumentação consistente com base na utilização da definição de Heine que permitisse estabelecer uma conclusão coerente face aos dados apresentados e à luz da definição de Heine.

Questionar o grupo turma se a resposta dada consegue, ou não, provar a não existência de limite? Depois requerer da turma a construção de um argumento com a estrutura sugerida na tarefa.

Tentar obter dos alunos um discurso claro e coerente dando eco a algumas das respostas dadas. Procurar que os dois alunos intervenham.

Durante este processo, promover a discussão e procurar outros intervenientes integrando algumas questões para o grupo turma*: Concordam todos com aquilo que foi apresentado ou explicado? Alguém tem algo a acrescentar? Alguém pensou de outra forma ou tem outra resposta? Querem colocar alguma questão aos vossos colegas? Alguma dúvida que os vossos colegas possam explicar?*

Por vezes pedir que um par específico explique porque não concorda com os colegas, sabendo que esse par resolveu utilizando outras estratégias.

Finalmente, escrever, com a ajuda dos alunos, a seguinte síntese:

Quando nos referimos a todas as sucessões que tendem para um valor por valores do domínio de uma função podemos dividir em três grupos de sucessões: $u_n \to a^-$ *ou* $u_n \to a^+$ *ou* $u_n \to a$ (esta última será trabalhada na próxima aula).

Se estudamos o comportamento de uma função a partir de uma sucessão convergente para um valor real *a* por valores do domínio da função inferiores a esse valor, em que $u_n \to a^-$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = b$ *então* $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = b$.

Se estudamos o comportamento de uma função a partir de uma sucessão convergente para um valor real *a* por valores do domínio da função superiores a esse valor, em que $u_n \to a^+$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = b$ *então* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b$.

Se estudamos o comportamento de uma função a partir de uma sucessão convergente para um valor real *a* por valores do domínio da função iguais a esse valor, em que $u_n \to a$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = b$ então $f(a) = b$.

Avaliação

Avaliação qualitativa de atitudes e valores a partir da observação dos alunos em aspetos como:

- Colaboração entre colegas, empenho e respeito pelas intervenções dos colegas e professor;
- Diálogo com os alunos e professor (participação e pertinência das questões levantadas e das respostas dadas);

Avaliação reguladora das aprendizagens, centrada na monitorização do trabalho autónomo e colaborativo e no questionamento dos alunos que incidirá sobre os seguintes aspetos:

- Feedback oral do professor às resoluções da tarefa e às representações gráficas obtidas;
- Identificar as dificuldades dos alunos na realização da tarefa e na estrutura argumentativa das suas explicações e justificações.

Instituto de Educação

2018/2019

Plano de aula
29 de março de 2019
Escola Secundária de Camões

3ª aula

Secundário – 11º ano

Tempo: 90 minutos

Domínio: Funções reais de variável real.
Tópico: Limites segundo Heine de funções reais de variável real.
Subtópicos: Aderência ao domínio de uma função real de variável real e definição de limite segundo Heine.

Sumário: Continuação da aula anterior. Realização de uma tarefa de exploração em torno da definição de limite de uma função segundo Heine.

Objetivos de aprendizagem

- Mobilizar conhecimentos prévios de limites de sucessões e de funções reais de variável real;
- Representar e interpretar gráficos e tabelas, com o recurso à calculadora;
- Reconhecer pontos aderentes ao domínio de uma função como pontos candidatos ao estudo do limite de uma função e a partir de definição prevista no Programa de Matemática A;
- Compreender a definição de limite de uma função segundo Heine a partir da variação dos valores dos termos de duas sucessões (u_n e $f(u_n)$);
- Identificar o limite de uma função quando x tende para um valor real ou infinito a partir da definição de limite segundo Heine, prevista no programa de Matemática A;
- Conjeturar, justificar e provar resultados.

Capacidades transversais

- Relacionar representações gráficas, tabelares e algébricas;
- Argumentação matemática;
- Comunicação matemática;
- Trabalho colaborativo.

Conhecimentos prévios

- Interpretar graficamente o limite de uma sucessão;
- Interpretar intuitivamente o limite de sucessões a partir dos valores registados numa tabela;
- Simplificar a expressão algébrica de uma função.

Recursos

- Projetor: Projeção de gráficos de funções realizados previamente com o Geogebra;
- Manual escolar;
- Quadro branco e marcador;

- Tarefa de exploração: “*Vamos investigar a definição de limite segundo Heine*”;
- Calculadora gráfica.

Metodologia de trabalho

- Consolidação de tópicos sobre domínios e pontos aderentes ao domínio e discussão de tópicos em torno da definição de limite segundo Heine a partir da interpretação de gráficos de funções reais de variável real;
- Trabalho autónomo e colaborativo (em grupos de dois) dos alunos: realização de uma tarefa de exploração que requer a aplicação das funcionalidades da calculadora gráfica;
- Monitorização do trabalho autónomo;
- Apresentação de resoluções de alunos e discussão coletiva em torno das mesmas.

Momentos da aula	
5) Início da aula e registo do sumário;	5 min
6) Revisão de tópicos da aula anterior (pontos aderentes e aderência a um conjunto) e abordagem introdutória de tópicos relacionados com a definição de limite segundo Heine, a partir da interpretação do gráfico de funções com o grupo turma;	25 min
7) Trabalho autónomo (pares de alunos);	40 min
8) Apresentação e discussão, em grande grupo, de resoluções de alunos; **Nota:** o trabalho autónomo, seguido da apresentação e discussão de resoluções, pode ser dividido em duas fases aproximadamente de 30min (trabalho autónomo 20min/ discussão 10min). No caso de a maior parte dos pares demonstrarem evidentes dificuldades em desenvolver a tarefa, principalmente durante a questão 2, levar a resolução para o quadro branco iniciando o primeiro momento de discussão coletiva antes dos alunos resolverem a questão 3. Por outro lado, se o momento que antecede o trabalho autónomo demorar mais 10-15 min do que o previsto, resolver parte da tarefa em conjunto com os alunos (questões 1 e 2), deixando somente a questão 3 para um momento de trabalho autónomo, a desenvolver em grupos de dois alunos.	20 min

Desenvolvimento da aula e estratégias a implementar	Tempo
5) Organização da sala de aula e registo do sumário.	5 min.
6) Discussão de tópicos em grande grupo: Recordar que começámos por querer identificar os pontos onde faz sentido investigar o limite de uma função e que se chegou à conclusão que os valores de x elegíveis para tal investigação podiam ser quaisquer um dos elementos do domínio da função em causa, mais os valores de x que, relativamente aos quais, posso encontrar pelo menos uma aproximação por valores do conjunto C, ou seja todos os “pontos aderentes” a C. A partir de um conjunto de números reais $C =]-\infty, 1[\cup [3,5[\cup]5, +\infty[$ identificar o conjunto dos pontos aderentes ao conjunto C como $\overline{C} =]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$ já que, além dos pontos do conjunto C, x=1 e x=5 também são pontos aderentes a C. Levar alunos a refletir sobre razões de se considerar x=1 e x=5 como pontos aderentes a C: 1) Pela definição de ponto aderente a um conjunto, basta encontrar uma sucessão de valores de C que tenda para 1 ou para 5 de forma a garantir que x=1 e x=5 sejam pontos aderentes a C. 2) Para x=1, posso ver pela representação de C numa reta real que posso encontrar uma sucessão de valores de C tal que $\lim x_n = 1$ (por exemplo $x_n = 1 - 1 \div n$, ou seja $x_n \to 1^-$, ou ainda, x_n tende para 1 por valores de C inferiores ou à esquerda de 1). 3) Para x=5, até posso encontrar duas sucessões de valores de C tais que $\lim x_n = 5$ (por exemplo $u_n = 5 - 1 \div n$ e $v_n = 5 + 1 \div n$, ou seja $u_n \to 5^-$ e $v_n \to 5^+$, ou ainda u_n tende para 5 por valores de C inferiores ou à esquerda de 5 e v_n converge para 5 por valores superiores ou à direita de 5). Considerar agora a função $f(x) = \frac{x}{x-4}$ e questionar os alunos sobre o seu domínio e sobre qual será a aderência ao conjunto que representa o domínio da função: $D_f = \mathbb{R}\backslash\{4\}$ e $\overline{D_f} = \mathbb{R}$, pois x=4 é um ponto aderente ao domínio da função já que consigo encontrar pelo menos duas sucessões que tendem para esse valor por valores inferiores ou por valores superiores. Assim, x=4 é um dos pontos onde posso estudar o limite da função, apesar de não pertencer ao seu domínio. **Dificuldades dos alunos:** Podem confundir o domínio da função com o conjunto dos pontos aderentes (aderência do domínio). **Papel do professor:** Questionar se o domínio tem de ser igual ao conjunto aderência? Explicitar, questionando os alunos, quais são os conjuntos correspondentes ao domínio da função estudada e à aderência ao domínio, mostrando desta forma que podem ser conjuntos diferentes.	25 min

Os alunos ainda poderão observar, a partir do deslocamento de um ponto ao longo do eixo das abcissas que representa a variação de valores dos termos das sucessões, como se obtém a aproximação de um valor real no eixo Ox a partir de uma sucessão.

Depois, estabelecer uma correspondência entre a aproximação dos valores de *x* do valor 4, que pode ser observada através do deslocamento de um ponto no eixo *Ox* que vai indicando uma sucessão x_n de valores do domínio a aproximarem-se ou tenderem para x=4, e a variação de valores de $f(x_n)$, que poderá ser visualizada pelo deslocamento de um ponto ao longo do gráfico da função *f* e de um ponto no eixo Oy que vai indicando a variação das imagens correspondentes à sucessão de valores x_n. Com isto pretende-se que os alunos verifiquem que o valor de $\lim_{x\to 4} f(x)$ pode decorrer da identificação de $\lim f(u_n)\ e\ \lim f(v_n)$ que representam os valores para os quais as imagens das sucessões u_n e v_n se aproximam ou tendem quando $u_n \to 4^-\ e\ v_n \to 4^+$.

Verificar que neste caso $\lim_{x\to 4} f(x)$ não existe visto que $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(v_n)$

De seguida, apresentar a definição de limite de uma função segundo Heine:

Definição de limite de uma função segundo Heine

Dada uma função f, real de variável real, sendo a e b números reais, diz-se que b é limite de $f(x)$ quando x tende para a quando a é ponto aderente a D_f e a imagem por f de toda a sucessão (x_n) convergente para a é uma sucessão convergente para b, (ou seja, $\lim(f(x_n)) = b$) e representa-se por $\lim_{x\longrightarrow a} f(x) = b$.

Nota: A definição continua válida nos casos em que b é infinito.
(Há outras definições. Esta está de acordo com o programa em vigor.)

O processo de identificação do limite passará, agora, por propor aos alunos que o limite poderá ser determinado a partir de uma dupla aproximação: *quando todas as sucessões u_n tendem para um valor real a ou para infinito* (representando isto a aproximação de *x* de um valor real *a* ou a sua tendência para infinito), *os termos da sucessão $f(u_n)$ também se aproximam, tendem ou convergem para um valor real b ou tendem para infinito* (representando isto a tendência de *f(x)* para um valor real b ou para infinito). Ou seja, $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = b \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = b, sendo \lim_{n\to+\infty} u_n = a.$

Dificuldades dos alunos: Apesar da visualização do deslocamento de um ponto ao longo do gráfico, os alunos podem não compreender o procedimento de dupla aproximação através do estudo do limite das sucessões u_n e $f(u_n)$, como é estipulado pela definição de limite segundo Heine

Papel do professor: Reforçar a animação relacionada com o deslocamento dos pontos, destacando o movimento de aproximação das imagens em consequência do movimento de aproximação dos objetos através da visualização do deslocamento de uma etiqueta, no eixo *Oy*.

Se necessário, mostrar mais de uma sucessão u_n a tender por valores superiores (ou inferiores) para o mesmo valor $x=a$ e que a respetiva sucessão $f(u_n)$ continua a tender para o valor *b*.

7) Trabalho autónomo dos alunos: realização de uma tarefa exploratória em grupos de dois. 40 min

Apresentação da tarefa:

Explicar aos alunos que devem realizar a tarefa a pares (com o colega de carteira habitual) e que terão cerca de 45 minutos para a resolver. A resolução deve ser entregue ao professor no final da aula (serão devolvidas na aula seguinte). 5 min

A tarefa deve ser resolvida na própria folha que contém o enunciado e todos os gráficos obtidos na calculadora devem ser transcritos para a folha da tarefa.

Na resolução da tarefa, os alunos devem usar caneta e devem fazer a correção no caderno ou apenas num dos conjuntos de folhas que contém o enunciado (serão entregues dois conjuntos a cada par). O outro conjunto será recolhido pelo professor no final da fase de trabalho autónomo ou no final da discussão coletiva (se os alunos assumirem previamente que não efetuarão alterações na sua resolução durante a fase de discussão).

Monitorização do trabalho dos alunos:

Enquanto os alunos resolvem a tarefa, o professor vai circular entre os alunos de maneira a acompanhar o trabalho realizado por cada par de alunos e a esclarecer pequenas dúvidas. Deste modo, consegue ficar com uma noção sobre as questões e dificuldades que foram sendo levantadas, assim como do progresso de cada grupo de alunos na tarefa, e selecionar as resoluções que considerar mais adequadas aos propósitos da discussão final no grupo turma. 35 min

Assim, o professor pode incentivar os pares, que estiverem bloqueados nalguma questão, a desenvolver o seu raciocínio de outra forma ou a explorar outros caminhos e, relativamente aos pares que terminarem mais cedo, a aprimorar e tornar mais sofisticadas as suas respostas. O professor deve intervir sem certificar ou corrigir explicitamente o que os alunos estiverem a fazer.
Perante as dúvidas dos alunos, o professor vai apresentar uma série de questões com o intuito de ajudar cada grupo a organizar, expressar e clarificar os raciocínios desenvolvidos, a menos que estas dúvidas sejam evidenciadas por vários grupos. Neste caso, o professor vai ter de colocar todo o grupo turma a par de tais dúvidas (trazendo-as para o quadro) e estimular os próprios alunos a esclarecê-las. Se as dúvidas levantadas persistirem, o professor poderá ter de reduzir o nível de dificuldade da tarefa.
No quadro dos momentos da aula, apresentado atrás, são estipulados alguns critérios definidores da estratégia a seguir.

Resolução da tarefa:

Questão 1.1:

n	u_n		n	v_n
1	3		1	-8
5	2.2		5	1.6
10	2.1		10	1,9
50	2.02		50	1.996
100	2.01		100	1.999
1000	2.001		1000	1,99999

Dificuldades dos alunos: Podem apresentar os valores sujeitos a uma aproximação estabelecida pelos alunos, por exemplo às décimas.

Papel do professor: Questionar os alunos sobre o título da tarefa e os objetivos possivelmente associados e se apresentar os valores aproximados à décima parece ser um procedimento adequado à determinação de limites? A identificação de um limite está relacionada com a aproximação a um valor ou com uma tendência apresentada por uma sequência infinita de valores? Será adequado alterar os valores obtidos de maneira a obtê-los com o mesmo número de casa decimais?

Dificuldades dos alunos: Podem ter problemas no preenchimento da tabela já que podem não saber usar a calculadora de modo a inserir apenas os valores de x desejados ou não saber inserir a expressão da sucessão na tabela.

Papel do professor: Fornecer as instruções necessárias ao par com problemas. Se verificar que esse problema é comum a grande parte da turma, interromper a tarefa e fornecer as instruções a toda a turma.

Questão 2.1:

n	u_n	$f(u_n)$		n	v_n	$f(v_n)$
1	3	5		1	-8	-17
5	2,2	3,4		5	1.6	2,2
10	2,1	3,2		10	1,9	2,8
50	2,02	3,04		50	1,996	2,992
100	2,01	3,02		100	1,999	2,998
1000	2,001	3,002		1000	1,99999	2,99998

Dificuldades dos alunos: Além dos problemas já referidos no ponto 1.1, os alunos podem revelar problemas com o preenchimento das colunas $f(u_n)\ e\ f(v_n)$ porque não entendem o que têm de fazer.

Papel do professor: Questionar os alunos se é preciso determinar a expressão da sucessão $f(u_n)$ para preencher a tabela? Por exemplo, na primeira tabela, quando *n = 1*, $u_1 = 3$, portanto nesta tabela como poderei preencher o espaço correspondente a $f(u_n)\ quando\ n = 1$? Se necessário reduzir o nível de desafio da tarefa e perguntar se isso não passará por ter de achar $f(u_1)$, continuando a fazer as correspondências adequadas entre os valores de *n*, u_n e $f(u_n)$ nas outras linhas?

No entanto, se algum par de alunos considerar que é melhor determinar a expressão de $f(u_n)$, o professor deverá incentivar esse cálculo porque, provavelmente, pode ser um processo mais rápido para obter os valores adequados ao preenchimento da tabela através da máquina.

Dificuldades dos alunos: Podem revelar problemas em obter uma expressão de $f(u_n) e\ de\ f(v_n)$.

Papel do professor: Questionar o que é preciso fazer para, por exemplo, determinar *f(3)*? Então e para determinar $f(u_n)\ ou\ f(v_n)$? Questionar se não é possível usar uma expressão mais simples de *f(x)*? Como posso simplificar a expressão duma função racional, antes de substituir x pelo termo geral das sucessões? Relembrar que o processo de factorização pode ser utilizado com esse fim, se for necessário reduzir o nível de desafio.

Questão 2.1.1: primeira resolução

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = 3$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) = 3$, tomando em consideração os valores da tabela, já que quando $n \to +\infty, f(u_n) \to 3$.

Resolução alternativa: Após simplificar a expressão da função *f*, $f(x) = 2x - 1 \wedge x \neq 2$, posso utilizar a definição de limite segundo Heine para determinar $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 3$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 3$.

Segunda resolução alternativa: $f(u_n) = 2\left(2 + \frac{1}{n}\right) - 1 = 3 + \frac{2}{n}$, logo $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = 3$, já que $2.\frac{1}{n} \to 0$; $f(v_n) = 2\left(2 - \frac{10}{n^2}\right) - 1 = 3 - \frac{20}{n^2} = 3$ já que $\frac{20}{n^2} \to 0$.

Terceira resolução: Se a expressão de *f não for simplificada,* $f(u_n) = \frac{3n^2+2n}{n^2} = 3 + \frac{2}{n}$, logo $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = 3$; $f(v_n) = \frac{30n^4-200n^2}{10n^4}$, logo $\lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) = 3$

Dificuldades dos alunos: Podem não entender que os valores de tabela de $f(u_n)$ e $f(v_n)$ tendem ambos para 3.

Papel do professor: Questionar se os alunos não observam nenhuma tendência nos valores tabelados das sucessões $f(u_n)$ e $f(v_n)$, quando os valores de n tendem para mais infinito? Ou seja, será que esses valores não se aproximam de um valor, quando n tende para mais infinito?

Dificuldades dos alunos: Podem não entender que $f(u_n)$ e $f(v_n)$ correspondem a duas sucessões?

Papel do professor: A identificação dos valores correspondentes $\lim f(u_n)$ e $\lim f(v_n)$ correspondem ao limite de duas sucessões, ou não? $f(u_n)$ e $f(v_n)$ são funções de variável real? Ou são funções de variável natural? Sendo assim, para onde tem de tender os valores de *n* para determinar os limites pedidos na pergunta?

Dificuldades dos alunos: Podem ter problemas com a determinação dos termos gerais de ambas as sucessões?

Papel do professor: Questionar o que é preciso fazer para, por exemplo, determinar *f(3)*? Então e para determinar $f(u_n)$ ou $f(v_n)$? Questionar se não é possível usar uma expressão mais simples de *f(x)*? Como posso simplificar a expressão duma função racional, antes de substituir x pelo termo geral das sucessões? Relembrar que o processo de factorização pode ser utilizado com esse fim, se for necessário reduzir o nível de desafio.

Questão 2.1.2:

Resolução: Dado que existem sucessões $u_n \to 2$ e $v_n \to 2$, *tais que* $f(u_n) \to 3$ e $f(v_n) \to 3$, então a afirmação é falsa, pois, se existir limite de *f(x)* quando $x \to 2$, pela definição de limite segundo Heine é garantido que o valor deste limite não poderia ser diferente de 3.

Resolução alternativa: Se determinar uma expressão simplificada de $f(x)$ pode mostrar-se que para todas as sucessões x_n que tendem para 2, por valores do domínio de *f* , $f(x_n) \to 3$; então assim posso afirmar que a afirmação é falsa pois $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$, porque, com base na definição de limite segundo Heine tenho garantia deste resultado.

Mostrar que para todas as sucessões $x_n \to 2$ *por valores do domínio de* $f, f(x_n) \to 3$:

Sendo $f(x) = \frac{2x^2-5x+2}{x-2} = 2x - 1 \wedge x \neq 2$, primeiro, pensemos em todas as sucessões $x_n \to 2^+$ e verificamos que $f(x_n) \to 2.2^+ - 1 \to 3^+$; agora, pensemos em todas as sucessões $x_n \to 2^-$ e verificamos que $f(x_n) \to 2.2^- - 1 \to 3^-$; As sucessões $x_n \to 2$ não preciso de verificar porque *x = 2* não pertence ao domínio da função..

Dificuldades dos alunos: Podem não conseguir relacionar os valores de $\lim f(u_n)$ *e de* $\lim f(v_n)$ *com* $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ através da definição de Heine.

Papel do professor: Questionar para onde tendem as sucessões u_n e v_n? E para onde é que tende *x*? E relativamente às sucessões $f(u_n)$ e $f(v_n)$, para onde convergem estas sucessões? O que diz a definição de limite segundo Heine?

Dificuldades dos alunos: Segundo a definição é necessário saber o que se passa com todas as sucessões que tendem para 2, no entanto só conhecem dois termos gerais de sucessões que tendem para 2, logo podem pensar que não será possível tirar conclusões a partir da definição de Heine.

Papel do professor: Apesar da definição referir todas as sucessões, a partir do momento que sei o comportamento de $f(x_n)$, sendo x_n uma sucessão que, por exemplo, tende para 2^+, então não será preciso conhecer o termo geral de mais nenhuma sucessão u_n que também tenda para 2^+, porque *o comportamento de $f(u_n)$ vai ser igual ao de $f(x_n)$ já que tal apenas dependerá da expressão algébrica de f(x) e não do termo geral das sucessões.*

Portanto, questionar os alunos se será mesmo preciso estudar como se comporta *f(xₙ) de* todas as sucessões x_n que tendem para 2^+ (ou para 2^-)? Sugerir que os alunos averiguem isso mesmo investigando $f(x_n)$ a partir do termo geral de mais uma ou duas sucessões que tendam para 2^+.

Questão 3.1

n	u_n	$g(u_n)$		n	v_n	$g(v_n)$
1	3	2		1	−8	-6,8
5	2,2	-6,8		5	1,6	7,6
10	2,1	-16,9		10	1,9	22,9
50	2,02	-96,98		50	1,996	502,996
100	2,01	-196,99		100	1,999	2002,999
1000	2,001	-1996,999		1000	1,99999	200002,99999

Dificuldades dos alunos: Idêntico a 2. 1.

Papel do professor: Idêntico a 2. 1.

Questão 3.1.1:

Resoluções: Processos idênticos a 2.1.1, só mudam resultados e expressões.

(Dado que quando $n \to +\infty$, ($u_n \to 2^+$) os valores $g(u_n) \to +\infty$ (segundo a tabela os valores de g (u_n) estão sempre a aumentar, não convergindo para nenhum valor real), então $\lim_{n\to+\infty} g(u_n) = +\infty$.

Por sua vez, quando $n \to +\infty$, ($v_n \to 2^-$) os valores $g(v_n) \to -\infty$, então $\lim_{n\to+\infty} g(v_n) = -\infty$.)

Resultados: $\lim g(u_n) = -\infty \; e \; \lim g(v_n) = +\infty$

Expressão simplificada *g(x)*: $g(x) = x + 1 - \frac{2}{x-2}$

Expressão $g(u_n) = 2 + \frac{1}{n} + 1 - \frac{2}{2+\frac{1}{n}-2} = 3 - 2n + \frac{1}{n}$

Expressão $g(v_n) = 2 - \frac{10}{n^2} + 1 - \frac{2}{2-\frac{10}{n^2}-2} = 3 - \frac{10}{n^2} + \frac{n^2}{5}$

Dificuldades dos alunos: Através dos valores da tabela os alunos podem ficar indecisos se o comportamento revelado é suficiente para considerar que $\lim g(u_n) = -\infty \; e \; \lim g(v_n) = +\infty$ **(além das dificuldades referidas em 2.1.1).**

Papel do professor: Questionar se é necessário ambas as sucessões tenderem para o mesmo valor? Por outro lado, será necessário o valor dos termos tenderem para um valor real, ou podem ter outro tipo de tendência, por exemplo, tenderem a aumentar/diminuir de valor infinitamente sem fixarem esse crescimento em torno de um valor real? E se substituírem alguns valores maiores de 1000 o que penas que vai acontecer?

Questão 3.1.2:

Resolução: Dado que existem sucessões que tendem para 2 por valores do domínio de g, $u_n \to 2^+ e \; v_n \to 2^-$, tais que $\lim_{n\to+\infty} g(u_n) \neq \lim_{n\to+\infty} g(v_n)$ (ou seja, $g(u_n) \to +\infty \; enquanto \; g(v_n) \to -\infty$), então $\lim_{x\to2} g(x)$ não existe, porque, com base na definição do limite segundo Heine, só existe $\lim_{x\to2} g(x)$ se para todas as sucessões x_n que tendem para 2, g (x_n) tiver necessariamente o mesmo limite.

Dificuldades dos alunos: Segundo a definição é necessário saber o que se passa com todas as sucessões que tendem para 2, no entanto só conhecem dois termos gerais de sucessões que tendem para 2 mais duas sucessões com limite infinito e podem pensar que não será possível tirar conclusões a partir da definição de Heine.

Papel do professor: E não é possível obter os termos gerais de $g(u_n) \; e \; g(v_n)$? E será mesmo necessário? Ou seja, será necessário conhecer o seu termo geral para identificar para onde tendem as sucessões $g(u_n) \; e \; g(v_n)$? Seria necessário que estas sucessões também convergissem para 2? Que significa estas sucessões terem limite infinito? Que consequências tem segundo a definição?

Dificuldades dos alunos: Podem não conseguir relacionar os valores de $\lim g(u_n) \; e \; de \; \lim g(v_n) \; com \; \lim_{x\to2} g(x)$ através da definição de Heine.

Dificuldades dos alunos: podem apresentar problemas na formulação de um argumento, que pode ser construído a partir dos limites de $g(u_n)$ e $g(v_n)$, $-\infty \; e + \infty \; respetivamente$, pois sendo diferentes isso basta para mostrar que $\lim_{x\to2} g(x) \; não \; existe$, já que pela definição de Heine seria necessário que para todas as sucessões que convergem para 2, incluindo, portanto, u_n e v_n , se verificasse que $g(u_n) \; e \; g(v_n)$ tivessem o mesmo limite.

Papel do professor: Questionar se leram a definição de Heine novamente? O que diz a definição? É importante que alguma sucessão convirja para 2? Quais? Isso é suficiente para existir limite quando os valores de x tendem

para 2? As sucessões $g(u_n)$ e $g(v_n)$ também convergem para 2? Para onde tendem os valores dos termos destas sucessões? E assim qual o valor de limite da função *g* quando os valores de *x tendem para 2?* **8) Apresentação e discussão de resoluções:** Durante a fase de monitorização, detetar pares de alunos que tenham optado pelas resoluções que privilegiaram a interpretação das tabelas ou por algum dos procedimentos algébricos referidos nas resoluções alternativas, principalmente se simplificaram a expressão das funções racionais. A discussão decorrerá da seguinte forma: - Em cada questão, selecionarei um par de alunos para registar no quadro a sua resolução, tendo em conta os seguintes critérios: **Questão1:** Selecionar um par de alunos que tenham uma resolução sem incorreções. A estratégia passa por pedir aos alunos que expliquem as suas opções**, questionando os alunos sobre alguns dos termos utilizados:** Posso utilizar o termo *tendem* em vez de *convergem*? E será correto se disser que *os valores dos termos da sucessão tendem para …*? Será que *uma sucessão pode convergir para infinito*? E, se em vez de dizer que *converge para infinito*, disser que *os valores dos termos da sucessão tendem para infinito*? E se em vez de *tendem* usar o termo *aproximam-se de infinito*? E se disser *aproximam-se de um valor real* em vez de dizer *tendem para um valor real*? **Questão2:** Chamar ao quadro um par que não tenha incorreções na tabela, mas se tiverem sido detetados alguns problemas durante o seu preenchimento fazer uma referência aos métodos mais expeditos para esse efeito. Além deste critério, também deve ser tomado em consideração os dados em que se basearam para responder às questões 2.1.1 e 2.1.2, atribuindo preferência aos pares que partiram da interpretação da tendência dos valores registados na tabela. Na pergunta 2.1.2 selecionar também um par que tenha realizado procedimentos algébricos para vir ao quadro mostrar a sua resolução, depois do primeiro par. **Questionar primeiro par:** Pedir para os alunos para exporem o seu raciocínio em torno dos valores da tabela (incentivar os dois alunos a participar) e questionar se fosse acrescentada à tabela um valor de n maior que 1000 o que seria de esperar? Concordam que $\lim g(u_n)$ possa ser traduzido para $\lim_{x\to 2^+} g(x)$ se considerarmos que $x \to 2^+$ significa a aproximação dos valores de x a 2 por valores superiores a 2 ou à sua direita? A mesma questão sobre $g(v_n)$ mas desta feita comparando o estudo do seu limite ao estudo $g(x)\ quando\ x\ se\ aproxima\ ou\ tende\ para\ 2\ por\ valores\ inferiores\ ou\ à\ sua\ esquerda$? **Poderei ou não garantir que $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$? Existe alguma sucessão que convirja para 2 tal que $\lim f(u_n) \neq 3$?** **Questionar segundo par** sobre processos de simplificação, tenham, ou não, sido utilizados para obter as expressões apresentadas no quadro? Pedir ao resto da turma para ir confirmando ou retificando os vários processos algébricos apresentados. **Questão 3:** Selecionar um par de alunos segundo o mesmo critério da questão 2, exceto no que diz respeito à última pergunta 3.1.2, preferindo desta vez um par que, apesar de ter abordado o facto de haver duas sucessões $g(u_n)$ e $g(v_n)$ com limites diferentes, tenha efetuado a prova requerida de forma pouco sólida, isto é, sem que tenha havido um esforço para construir uma argumentação consistente com base na utilização da definição de Heine que permitisse estabelecer uma conclusão coerente face aos dados apresentados e à luz da definição de Heine. Questionar o grupo turma se a resposta dada consegue, ou não, provar a não existência de limite? Depois requerer da turma a construção de um argumento com a estrutura sugerida na tarefa. **Tentar obter dos alunos um discurso claro e coerente dando eco a algumas das respostas dadas. Procurar que os dois alunos intervenham.** **Durante este processo, promover a discussão e procurar outros intervenientes integrando algumas questões para o grupo turma*: Concordam todos com aquilo que foi apresentado ou explicado? Alguém tem algo a acrescentar? Alguém pensou de outra forma ou tem outra resposta? Querem colocar alguma questão aos vossos colegas? Alguma dúvida que os vossos colegas possam explicar?*** **Por vezes pedir que um par específico explique porque não concorda com os colegas, sabendo que esse par resolveu utilizando outras estratégias.** **Finalmente, escrever, com a ajuda dos alunos, a seguinte síntese**: Quando nos referimos a todas as sucessões que tendem para um valor por valores do domínio de uma função podemos dividir em três grupos de sucessões: $u_n \to a^-\ ou\ u_n \to a^+\ ou\ u_n \to a$ (esta última será trabalhada na próxima aula). Se estudamos o comportamento de uma função a partir de uma sucessão convergente para um valor real *a* por valores do domínio da função inferiores a esse valor, em que $u_n \to a^-$ e $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = b\ então\ \lim_{x\to a^-} f(x) = b$.	 20 min

Se estudamos o comportamento de uma função a partir de uma sucessão convergente para um valor real *a* por valores do domínio da função superiores a esse valor, em que $u_n \to a^+$ e $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = b$ então $\lim_{x\to a^+} f(x) = b$. Se estudamos o comportamento de uma função a partir de uma sucessão convergente para um valor real *a* por valores do domínio da função iguais a esse valor, em que $u_n \to a$ e $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = b$ então $f(a) = b$.	

Avaliação

Avaliação qualitativa de atitudes e valores a partir da observação dos alunos em aspetos como:

- Colaboração entre colegas, empenho e respeito pelas intervenções dos colegas e professor;
- Diálogo com os alunos e professor (participação e pertinência das questões levantadas e das respostas dadas);

Avaliação reguladora das aprendizagens, centrada na monitorização do trabalho autónomo e colaborativo e no questionamento dos alunos que incidirá sobre os seguintes aspetos:

- Feedback oral do professor às resoluções da tarefa e às representações gráficas obtidas;
- Identificar as dificuldades dos alunos na realização da tarefa e na estrutura argumentativa das suas explicações e justificações.

U LISBOA | ie Instituto de Educação

2018/2019

Plano de aula
1 de abril de 2019
Escola Secundária de Camões

4ª aula

Secundário – 11º ano

Tempo: 90 minutos

Domínio: Funções reais de variável real.
Tópico: Limites segundo Heine de funções reais de variável real.
Subtópicos: Limites laterais e limite num “ponto aderente” ao domínio de uma função.

Sumário: Determinação do limite num “ponto aderente” ao domínio de uma função. Definição e determinação de limites laterais.

Objetivos de aprendizagem

- Aplicar a definição de limite de uma função segundo Heine na determinação do limite num “ponto aderente” ao domínio de uma função real de variável real;
- Identificar os limites laterais num “ponto aderente” ao domínio de uma função;
- Reconhecer que a existência de limite num ponto aderente que não pertença ao domínio da função exige que os limites laterais sejam iguais;
- Reconhecer que só existe limite, quando x tende para um “ponto aderente” que pertence ao domínio da função, se a imagem de x for igual aos valores dos respetivos limites laterais, se estes puderem ser definidos.
- Desenvolver uma noção intuitiva da identificação do valor do limite a partir da interpretação do gráfico de funções reais de variável real;
- Conjeturar, justificar conclusões e encontrar contraexemplos.

Capacidades transversais

- Relacionar representações;
- Estabelecer conexões;
- Argumentação matemática;
- Comunicação matemática;
- Trabalho colaborativo.

Conhecimentos prévios
- Relacionar a expressão algébrica de uma função com a sua representação gráfica e vice-versa. - Reconhecer características do gráfico de funções definidas por ramos e de funções constantes.

Recursos
- Quadro branco e marcador; - Tarefa de exploração: "Limite num ponto aderente ao domínio de uma função real de variável real"; - Calculadora gráfica; - Manual digital "Novo Espaço 11ºano: Parte 2".

Metodologia de trabalho
- Discussão coletiva em torno das resoluções dos alunos da tarefa realizada na aula anterior; - Trabalho autónomo e colaborativo (em grupos de dois) dos alunos: realização de uma tarefa de exploração que requer a utilização da calculadora gráfica; - Monitorização do trabalho autónomo; - Apresentação de resoluções de alunos e discussão coletiva em torno das mesmas.

Momentos da aula	
9) Início da aula e registo do sumário;	5 min
10) Discussão em grande grupo das resoluções da tarefa "Vamos investigar a definição de limite de uma função segundo Heine";	20 min
11) Trabalho autónomo (pares de alunos): realização da tarefa "Limite num ponto aderente ao domínio de uma função real de variável real";	40 min
12) Apresentação e discussão, em grande grupo, de resoluções de alunos; **Nota:** o trabalho autónomo, mais a apresentação e discussão de resoluções que se seguem, vão ser divididos em duas fases: Até **questão 1.2.1** – 53 min (trabalho autónomo 33 min/ discussão 20 min); **questão 1.3** – 12 min (trabalho autónomo 7 min/ discussão 5 min). No caso de a maior parte dos pares demonstrarem evidentes dificuldades em desenvolver a tarefa levar a resolução para o quadro branco iniciando o primeiro momento de discussão coletiva antes dos alunos resolverem a **questão 1.2**.	25 min

Desenvolvimento da aula e estratégias a implementar	Tempo
9) Organização da sala de aula e registo do sumário.	5 min.
10) Discussão em grande grupo das resoluções da tarefa "Vamos investigar a definição de limite de uma função segundo Heine": - Em cada questão, selecionar um par de alunos para registar no quadro a sua resolução, tendo em conta os seguintes critérios e estratégias: **Questão1:** Selecionar um par de alunos que tenham uma resolução baseada num procedimento algébrico em vez da leitura da tabela. A estratégia passa por pedir aos alunos que expliquem as suas opções**, questionando os alunos:** Que valores obtiveram na última linha da tabela? E que valores identificaram para os limites requeridos? Podem explicar como foram identificados? Podem explicar como determinaram o limite sem terem noção dos valores da tabela? Se fosse pedido para mostrar que o limite de ambas as sucessões é 4, que processo seria mais correto usar? Através da tendência verificada pelos valores da tabela, usar a definição de sucessão convergente para 4 ou tanto faz? **Incentivar os alunos a usar uma terminologia correta.** **Questão2.1 e 2.1.1 :** Chamar ao quadro um par que não tenha incorreções na tabela e questionar: Que procedimento usaram para completar a tabela? Fazer referência aos métodos mais expeditos para esse efeito: escrever a expressão da função *f(x)* na calculadora e introduzir os valores de u_n numa tabela ou determinar a expressão de $f(u_n)$ (após simplificação de f será mais fácil) e introduzir os valores de *n* indicados na primeira coluna… ou substituir, um a um, os valores de u_n na expressão de *f(x)*. Também deve ser tomado em consideração os dados em que se basearam para responder às questões 2.1.1 e	20 min

2.1.2, atribuindo preferência aos pares que partiram da interpretação da tendência dos valores registados na tabela.
Selecionar também um par que tenha realizado procedimentos algébricos para vir ao quadro mostrar a sua resolução, depois do primeiro par.

Questionamento 2.1.1: Pedir aos alunos para exporem o seu raciocínio conjetural em torno dos valores da tabela (incentivar os dois alunos a participar) e questionar se fosse acrescentada à tabela um valor de n maior que 1000 o que seria de esperar? Que significa $\lim g(u_n)$? Concordam que $\lim g(u_n)$ possa ser traduzido para $\lim_{x\to 2^+} g(x)$ se considerarmos que $x \to 2^+$ significa a aproximação dos valores de x a 2 por valores superiores a 2 ou à sua direita? A mesma questão sobre $f(v_n)$ mas desta feita comparando o estudo do seu limite ao estudo de $f(x)\ quando\ x\ tende\ para\ 2\ por\ valores\ inferiores\ ou$ à $sua\ esquerda$?

Se os alunos na sua resposta não explicarem o seu raciocínio, referir que conjeturar implica levantar uma tese hipotética ou antecipar/prever um resultado/consequência/relação etc. e que tal requere a apresentação de uma explicação argumentativa que justifique a crença na hipótese conjeturada.

Questionamento 2.1.2: Poderei ou não garantir que $\lim_{x\to 2} f(x) \neq 3$? Porquê? Qual a relação entre este limite e os limites conjeturados na questão anterior? Existe alguma sucessão que convirja para 2 tal que $\lim f(u_n) \neq 3$? **Então e se quisesse mostrar que era igual a 3, o que seria necessário fazer? Bastava utilizar a tendência evidenciada pela variação dos valores das duas tabelas ou seria necessário outro tipo de procedimento?**

Questionar sobre processos de simplificação e procedimentos algébricos necessários a tal demonstração (pedir à turma para ir confirmando ou retificando os vários processos algébricos apresentados):

Por exemplo, sendo $f(x) = \frac{2x^2-5x+2}{x-2} = 2x - 1 \ \wedge x \neq 2$, primeiro, pensemos em todas as sucessões $x_n \to 2^+$e verificamos que $f(x_n) \to 2.2^+ - 1 \to 3^+$; agora, pensemos em todas as sucessões $x_n \to 2^-$ e verificamos que $f(x_n) \to 2.2^- - 1 \to 3^-$; As sucessões $x_n \to 2$ não preciso de verificar porque *x = 2* não pertence ao domínio da função *f.*

Espera-se que os alunos construam um argumento semelhante ao seguinte: Dado que existem sucessões $u_n \to 2\ e\ v_n \to 2, tais\ que\ f(u_n) \to 3\ e\ f(v_n) \to 3$, então a afirmação é falsa, pois, se existir limite de *f(x)* quando $x \to 2$, pela definição de limite segundo Heine é garantido que o valor deste limite não poderia ser diferente de 3.

Questão 3.1.1: Selecionar um par de alunos seguindo as mesmas estratégias da questão **2.1.1**. Questionar sobre os resultados infinitos.

Questão 3.1.2: exceto no que diz respeito à última pergunta 3.1.2, preferindo desta vez um par que, apesar de ter abordado o facto de haver duas sucessões $g(u_n)\ e\ g(v_n)$ com limites diferentes, tenha efetuado a prova requerida de forma pouco sólida, isto é, sem que tenha havido um esforço para construir uma argumentação consistente com base na utilização da definição de Heine que permitisse estabelecer uma conclusão coerente face aos dados apresentados e à luz da definição de Heine.

Questionar o grupo turma se a resposta dada chega, ou não, para provar a não existência de limite? Atribuir mérito às partes bem explicadas sem esquecer de referir que uma demonstração deve exigir uma organização mais sólida dos argumentos apresentados.

Depois requerer da turma a construção de um argumento com a estrutura sugerida na tarefa: Dado que existem sucessões $u_n \to 2^+\ e\ v_n \to 2^-, tais\ que\ g(u_n) \to -\infty\ e\ g(v_n) \to +\infty$, então não pode existir limite de *g(x)* quando $x \to 2$, pois, pela definição de limite segundo Heine apenas haveria limite se as imagens de todas as sucessões que tendem para 2 através da função g(x) tendessem para o mesmo valor.

Tentar obter dos alunos um discurso claro e coerente dando eco a algumas das respostas dadas. Procurar que os dois alunos intervenham.

Durante este processo, promover a discussão e procurar outros intervenientes integrando algumas questões para o grupo turma*: Concordam todos com aquilo que foi apresentado ou explicado? Alguém tem algo a acrescentar? Alguém pensou de outra forma ou tem outra resposta? Querem colocar alguma questão aos vossos colegas? Alguma dúvida que os vossos colegas possam explicar?*

Por vezes pedir que um par específico explique porque não concorda com os colegas, sabendo que esse par resolveu utilizando outras estratégias.

Finalmente, escrever, com a ajuda dos alunos, a seguinte síntese:

Quando nos referimos a todas as sucessões que tendem para um valor aderente ao domínio da função, mas que não pertença ao domínio, por valores do domínio de uma função podemos dividi-las em dois grupos de sucessões: $u_n \to a^- \ ou \ u_n \to a^+$.

Se estudamos o comportamento de uma função a partir de uma sucessão convergente para um valor real *a* por valores do domínio da função inferiores ou á esquerda desse valor, em que $u_n \to a^-$ e $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = b \ então \ \lim_{x\to a^-} f(x) = b$.

Se estudamos o comportamento de uma função a partir de uma sucessão convergente para um valor real *a* por valores do domínio da função superiores ou á direita desse valor, em que $u_n \to a^+$ e $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = b \ então \ \lim_{x\to a^+} f(x) = b$.

Denominar estes dois limites por limites laterais, à esquerda e à direita, de f(x) quando x tende para a.

11) Trabalho autónomo dos alunos: realização de uma tarefa exploratória em grupos de dois. — 40 min

Apresentação da tarefa: — 5 min

Explicar aos alunos que devem realizar a tarefa a pares (com o colega de carteira habitual) e que terão cerca de 45 minutos para a resolver. A resolução deve ser entregue ao professor no final da aula (serão devolvidas na aula seguinte).

A tarefa deve ser resolvida na folha que contém o enunciado e todos os gráficos obtidos na calculadora devem ser transcritos para a folha da tarefa.

Na resolução da tarefa, os alunos devem usar caneta e devem fazer a correção no caderno ou apenas num dos conjuntos de folhas que contém o enunciado (serão entregues dois conjuntos a cada par). O outro conjunto será recolhido pelo professor no final da fase de trabalho autónomo ou no final da discussão coletiva (se os alunos assumirem previamente que não efetuarão alterações na sua resolução durante a fase de discussão).

Monitorização do trabalho dos alunos: — 35 min

Enquanto os alunos resolvem a tarefa, o professor vai circular entre os alunos de maneira a acompanhar o trabalho realizado por cada par de alunos e a esclarecer pequenas dúvidas. Deste modo, consegue ficar com uma noção sobre as questões e dificuldades que foram sendo levantadas, assim como do progresso de cada grupo de alunos na tarefa, e selecionar as resoluções que considerar mais adequadas aos propósitos da discussão final em grupo-turma.

Assim, o professor pode incentivar os pares, que estiverem bloqueados nalguma questão, a desenvolver o seu raciocínio de outra forma ou a explorar outros caminhos e, relativamente aos pares que terminarem mais cedo, a aprimorar e tornar mais sofisticadas as suas respostas. O professor deve intervir sem certificar ou corrigir explicitamente o que os alunos estiverem a fazer.

Perante as dificuldades/dúvidas dos alunos, o professor vai apresentar uma série de questões com o intuito de ajudar cada grupo a organizar, expressar e clarificar os raciocínios desenvolvidos, a menos que estas dúvidas sejam evidenciadas por vários grupos. Neste caso, o professor vai ter de colocar todo o grupo turma a par de tais dúvidas (trazendo-as para o quadro) e estimular os próprios alunos a esclarecê-las. Se as dúvidas levantadas persistirem, o professor poderá ter de reduzir o nível de dificuldade da tarefa.

Resolução da tarefa:

Questão 1.1: Em todas as alíneas, exceto f), o limite existe com valor 4. A alínea f) contém um limite que não existe: Dado que 4 não é aderente a $]4, +\infty[\cap D_f$, então $\lim_{x\to 4^+} f(x)$ não pode ser definido, já que pela definição de limite só faz sentido estudar o limite em pontos aderentes ao domínio da função *f*.

Dificuldades dos alunos: Os alunos podem pensar que têm de utilizar sucessões para concluir sobre a existência dos limites?

Papel do professor: Questionar como é que foram determinados os limites na primeira aula? O limite de uma função não pode ser apreciado graficamente como um processo de dupla aproximação? Qual era a função das sucessões na definição de Heine? Não seria para definir de forma geral esse processo de dupla aproximação? E através do gráfico de uma função não será possível interpretar essa dupla aproximação sem ter de usar sucessões?

Dificuldades dos alunos: Podem apresentar dificuldades em localizar no gráfico a interpretação dos limites (exemplo quando $x \to 3{,}5^{\pm}$).

Papel do professor: Questionar o que significa $x \to 3{,}5^{-}$ e $x \to 3{,}5^{+}$? Qual corresponde a uma aproximação por valores inferiores/superiores ou á esquerda/direita de 3,5? E o valor do limite é determinado pela aproximação a x=3,5, ou está relacionado com a aproximação verificada em relação às imagens correspondentes às aproximações a 3,5? Como fazer a leitura desta dupla aproximação no gráfico?

Dificuldades dos alunos: Podem considerar que têm de relacionar a existência do $\lim_{x\to 4} f(x)$ com a existência de $\lim_{x\to 4^{+}} f(x)$ e admitir que este último limite tem valor idêntico ao do primeiro.

Papel do professor: Questionar se os alunos não entenderam a noção de limite lateral? Ler a definição do manual com os alunos e depois questionar:

4 é aderente ao $]4,+\infty[\, \cap D_f$? O que pode significar esta expressão? Qual é o domínio da função *f* ? É possível aproximarmo-nos de 4 por valores superiores que pertençam ao domínio da função?

Questão 1.1.1: a) Concordo, já que $\lim_{x\to -3^{-}} f(x) = \lim_{x\to -3^{+}} f(x) = 4$ *e* $-3 \notin D_f$, apesar de ser ponto aderente ao domínio, então $\lim_{x\to -3} f(x) = 4$, porque pela definição de Heine as imagens por f(x) de todas sucessões que tendem para -3 também tendem sempre para 4.

b) Não concordo, pois $\lim_{x\to 3{,}5^{-}} f(x) = \lim_{x\to 3{,}5^{+}} f(x) = 4$, logo não pode ser 3,5.

c) Não concordo, porque as imagens de todas as aproximações de 4 por valores do domínio de f(x) tendem para 4 (quando $u_n \to 4^{-}$, $f(u_n) \to 4$ *e quando* $v_n \to 4$, $f(v_n) \to 4$)

Questão 1.2:

n	u_n	$f(u_n)$
1	0	-2
10	2,7	2,86
100	2,97	3,8806
1000	2,997	3,988006
10000	2,9997	3,99880006
$n\to +\infty$	$u_n \to 3^{-}$	$f(u_n) \to 4$

n	v_n	$f(v_n)$
1	4	4
10	3,1	4
100	3,01	4
1000	3,001	4
10000	3,0001	4
$n\to +\infty$	$v_n \to 3^{+}$	$f(v_n) \to 4$

n	w_n	$f(w_n)$
1	3	6
10	3	6
100	3	6
1000	3	6
10000	3	6
$n\to +\infty$	$w_n \to 3$	$f(w_n) \to 6$

Dificuldades dos alunos: Os alunos podem revelar problemas com o preenchimento das colunas $f(u_n)$ *e* $f(v_n)$ porque não entendem o que têm de fazer.

Papel do professor: Questionar os alunos se é preciso determinar a expressão da sucessão $f(u_n)$ para preencher a tabela? Por exemplo, na primeira tabela, quando $n = 1$, $u_1 = 3$, portanto nesta tabela como poderei preencher o espaço correspondente a $f(u_n)$ *quando* $n = 1$? Se necessário reduzir o nível de desafio da tarefa e perguntar se

isso não passará por ter de achar $f(u_1)$, continuando a fazer as correspondências adequadas entre os valores de *n*, u_n e $f(u_n)$ nas outras linhas?
No entanto, se algum par de alunos considerar que é melhor determinar a expressão de $f(u_n)$, o professor deverá incentivar esse cálculo porque, provavelmente, pode ser um processo mais rápido para obter os valores adequados ao preenchimento da tabela através da máquina.
Dificuldades dos alunos: Podem revelar problemas em obter uma expressão de $f(u_n) e\ de\ f(v_n)$.
Papel do professor: Questionar se será mesmo necessário determinar tal expressão? O que é preciso fazer para, por exemplo, determinar *f(3)*? Então e para determinar $f(u_n)\ ou\ f(v_n)$? Questionar se não é possível usar uma expressão mais simples de *f(x)*? Como posso simplificar a expressão duma função racional, antes de substituir x pelo termo geral das sucessões? Relembrar que o processo de factorização pode ser utilizado com esse fim, se for necessário reduzir o nível de desafio.
Questão 1.2.1:
Resolução: $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 4\ e\ \lim_{x\to 3^+} f(x) = 4\ mas\ \lim_{x\to 3} f(x)\ não\ existe$, porque para todas as sucessões x_n que tendem para 3 o $\lim f(x_n)$ não tem sempre o mesmo valor (apesar das imagens das sucessões u_n e v_n tenderem para o mesmo valor, as imagens da sucessão w_n *por f(x) não tendem para o mesmo valor*, e com base na definição do limite de Heine era necessário que isto acontecesse para haver limite de f(x) quando x tende para 3.
Resolução alternativa: como $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 4$ mas $f(3) \neq 4$ então $\lim_{x\to 3} f(x)\ não\ existe$, porque o valor do limite de uma função, quando x tende para um valor do domínio dessa função, tem de ser necessariamente igual à imagem desse valor de x para garantir que a sucessão constante após *f* tenha limite idêntico ao dos limites laterais.
Dificuldades dos alunos: Os alunos poderão pensar que $\lim_{x\to 3} f(x) = f(4)$.
Papel do professor: O que diz a definição de limite de uma função segundo Heine? Basta existir uma sucessão cujos termos tendam para 3 para garantir a existência do limite de f(x) quando os valores de x se aproximam desse mesmo valor? Poderemos considerar que $\lim f(w_n) = f(3) = 6$ mas isto poderá servir para garantir que $\lim_{x\to 3} f(x)$ existe e é igual a 6?
Dificuldades dos alunos: Os alunos podem considerar que basta os limites laterais existirem e serem iguais para que $\lim_{x\to 3} f(x)$ também exista com valor idêntico ao dos limites laterais.
Papel do professor: A sucessão w_n converge para que valor? O que diz a definição de limite segundo Heine? O que é necessário acontecer para garantir a existência de limite quando os valores de x tendem para 3?
Questão 2.3:
Resolução: A é verdadeira, apesar do argumento, para estar mais completo, poder incluir uma referência ao $\lim f(w_n)$.

B é falsa porque não existem limites laterais para $x \to 5^{\pm}$, pois 5 não é aderente a $]5,+\infty[\cap D_f$ nem é aderente a $]-\infty, 5[\cap D_f$, logo o limite de uma função pode existir apesar dos limites laterais não poderem ser definidos.
Resolução alternativa: B é falsa porque por exemplo quando x tende para 3, existem os limites laterais para $x \to 3^{\pm}$, mas não existe limite quando $x \to 3$; por outro lado, x tende para 5 apenas através de um tipo de aproximação por valores do domínio da função, que pode ser representada pela sucessão constante $x_n = 5$, portanto f(5) é obrigatoriamente igual $\lim_{x\to 5} f(x)$.
Dificuldades dos alunos: Não reconhecerem a necessidade da função estar definida para valores infinitesimalmente próximos de x = 5 para haver limites laterais.
Papel do professor: Questionar se 4 é aderente ao $]4,+\infty[\cap D_f$? O que pode significar esta expressão? Qual é o domínio da função *f*? É possível aproximarmo-nos de 4 por valores superiores/inferiores que pertençam ao domínio da função?
Dificuldades dos alunos: Os alunos podem considerar que não é possível determinar o valor do limite num ponto isolado.

Papel do professor: A definição de limite segundo Heine diz que não há limite em pontos isolados do domínio da função? O que diz a definição? 5 é um ponto aderente ao domínio de f? Que sucessão pode representar uma possível aproximação de 5 por valores do domínio de f? **Dificuldades dos alunos:** Os alunos podem não entender o conceito de contraexemplo. **Papel do professor:** O que significa ser um exemplo de alguma coisa? E o que significará ser um contraexemplo? Quando quero mostrar que não corroboro determinada teoria o que posso apresentar? **12) Apresentação e discussão de resoluções:** Durante a fase de monitorização, detetar os pares de alunos que tenham optado pelas resoluções que privilegiaram a interpretação das representações tabelares no exercício 1.2.1. Nos exercícios 1.1 e 1.1.1 procurar levar ao quadro pares de alunos que tenham alguns erros na resolução, porque ambos os conteúdos contidos nessas questões podem servir para aproveitar o erro de forma a trabalhar a compreensão dos procedimentos e conceitos envolvidos (não levar ao quadro alunos com muitos erros para evitar que este momento se torne constrangedor). Na questão 1.1, alínea f) incentivar os alunos a construírem em grande grupo um argumento com a estrutura sugerida, se o par de alunos que apresentar a sua resolução no quadro não tiver um argumento estruturado dessa maneira. Nas alíneas de 1.1, abordar os seguintes tópicos: o valor de x em questão é ponto aderente ao domínio da função? Para onde tendem as imagens quando nos aproximamos de x= -3 (por exemplo) pela esquerda/direita desse valor ou por valores inferiores/superiores? Para que um limite não seja definível para um dado valor de x o que tem de acontecer? Na questão 1.1.1, abordar os seguintes tópicos: os valores -3, 4 e 3,5 são pontos aderentes ao domínio de f(x)? Então, isto significa que os três limites têm de existir ou que devem ser estudados nestes pontos? A tendência das imagens dos objeto/termos das sucessões que constituem as aproximações por valores superiores/inferiores de um valor x=a têm de ser iguais ao valor da imagem da função nesse ponto? Requerer dos alunos argumentos que sustentem as opções dos alunos relativamente à veracidade ou falsidade de cada alínea. Na questão 1.2, os alunos apenas têm de apresentar os valores da última linha de cada tabela e explicarem como procederam para registar os valores já referidos. Na questão 1.2.1, pedir aos alunos que expliquem o conceito de limite segundo Heine pelas próprias palavras. Requerer dos alunos a construção de um argumento que articule as conjeturas dos alunos relativamente ao preenchimento das tabelas e à leitura do gráfico e apresente as conclusões retiradas de forma coerente e consistente. Deixar a questão 1.3 para um segundo momento de trabalho autónomo já que esta questão coloca o aluno face a uma situação ainda não estudada e que exige que os alunos interpretem a definição de Heine e a apliquem a esta situação. Levar ao quadro tanto os contraexemplos apresentados nas resoluções dos alunos como os erros encontrados na argumentação. Referir a eficácia normalmente atribuída á apresentação de contraexemplos na refutação de argumentos. Tentar obter dos alunos um discurso claro e coerente dando eco a algumas das respostas dadas. Procurar que os dois alunos intervenham. Durante este processo, promover a discussão e procurar outros intervenientes integrando algumas questões para o grupo turma*: Concordam todos com aquilo que foi apresentado ou explicado? Alguém tem algo a acrescentar? Alguém pensou de outra forma ou tem outra resposta? Querem colocar alguma questão aos vossos colegas? Alguma dúvida que os vossos colegas possam explicar?* Por vezes pedir que um par explique porque usou estratégias diferentes dos colegas, por exemplo a partir do conhecimento de características da função, ou por procedimentos algébricos, ou com recursos a tabelas, etc. **Finalmente, com a ajuda dos alunos, tentar sintetizar as seguintes conclusões**: Quando nos referimos a todas as sucessões que tendem por valores do domínio de uma função para um valor aderente ao domínio da função e que também pertence ao domínio podemos dividi-las em três grupos de sucessões: $u_n \to a^- \; ou \; u_n \to a^+ ou \; u_n \to a$.	 30 min

Se estudamos o comportamento de uma função a partir de uma sucessão convergente para um valor real *a* por valores do domínio da função iguais a esse valor, em que $u_n \to a$ e $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = b$ então $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = b$.

Num ponto isolado do domínio de uma função, o limite de f(x) quando x tende para a abcissa

Seja f uma função, real de variável real, e a um ponto aderente ao domínio D_f.

- Se $a \notin D_f$ e existirem e forem iguais os limites $\lim_{x \to a^-} f(x)$ e $\lim_{x \to a^+} f(x)$, então conclui-se que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$.
- Se $a \in D_f$ e existirem e forem iguais a $f(a)$ os limites $\lim_{x \to a^-} f(x)$ e $\lim_{x \to a^+} f(x)$, então conclui-se que: $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
- Se existe $\lim_{x \to a} f(x)$ então existem os limites laterais e $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$.

x=a desse ponto é igual à imagem de f (a)

Nota: Corrigir a última linha do resumo retirado do manual: **Apenas é verdade se os limites laterais puderem ser definidos, ou seja apenas existem limites laterais se *a* for aderente a $]a, +\infty[\cap D_f$ ou se for aderente a $]-\infty, a[\cap D_f$.**

Avaliação

Avaliação qualitativa de atitudes e valores a partir da observação dos alunos em aspetos como:

- Colaboração entre colegas, empenho e respeito pelas intervenções dos colegas e professor;
- Diálogo com os alunos e professor (participação e pertinência das questões levantadas e das respostas dadas);

Avaliação reguladora das aprendizagens, centrada na monitorização do trabalho autónomo e colaborativo e no questionamento dos alunos que incidirá sobre os seguintes aspetos:

- Feedback oral do professor às resoluções da tarefa e às representações gráficas obtidas;
- Identificar as dificuldades dos alunos na realização da tarefa e na estrutura argumentativa das suas explicações e justificações.

U LISBOA | Instituto de Educação

2018/2019

Plano de aula
1 de abril de 2019
Escola Secundária de Camões

5ª aula

Secundário – 11º ano

Tempo: 90 minutos

Domínio: Funções reais de variável real.
Tópico: Limites segundo Heine de funções reais de variável real.
Subtópicos: Limites laterais e limite num "ponto aderente" ao domínio de uma função.

Sumário: Sistematização dos conceitos e propriedades da última aula. Realização de uma questão aula..

Objetivos de aprendizagem

- Reconhecer que a existência de limite num ponto aderente que não pertença ao domínio da função exige que os limites laterais sejam iguais;
- Reconhecer que só existe limite, quando x tende para um "ponto aderente" que pertence ao domínio da função, se a imagem de x for igual aos valores dos respetivos limites laterais, se estes puderem ser definidos.

- Conjeturar, justificar conclusões e encontrar contraexemplos.

Capacidades transversais
- Estabelecer conexões; - Argumentação matemática; - Comunicação matemática;

Conhecimentos prévios
- Relacionar a expressão algébrica de uma função com a sua representação gráfica e vice-versa. - Reconhecer características do gráfico de funções definidas por ramos e de funções constantes.

Recursos
- Quadro branco e marcador; - Questão aula - Calculadora gráfica;

Metodologia de trabalho
- Discussão coletiva em torno das resoluções dos alunos da tarefa realizada na aula anterior; - Instrumento de avaliação: realização de uma questão aula

Momentos da aula	
1) Início da aula e registo do sumário;	5 min
2) Discussão em grande grupo das resoluções da tarefa “Limite num ponto aderente ao domínio de uma função real de variável real”;	25 min
3) Realização de uma questão aula com consulta.	60 min

Desenvolvimento da aula e estratégias a implementar	Tempo
1) Organização da sala de aula e registo do sumário.	5 min.
2) Apresentação e discussão de resoluções: Durante a fase de monitorização, detetar os pares de alunos que tenham optado pelas resoluções que privilegiaram a interpretação das representações tabelares no exercício 1.2.1. Nos exercícios 1.1 e 1.1.1 procurar levar ao quadro pares de alunos que tenham alguns erros na resolução, porque ambos os conteúdos contidos nessas questões podem servir para aproveitar o erro de forma a trabalhar a compreensão dos procedimentos e conceitos envolvidos (não levar ao quadro alunos com muitos erros para evitar que este momento se torne constrangedor). **Na questão 1.1, alínea f)** incentivar os alunos a construírem em grande grupo um argumento com a estrutura sugerida, se o par de alunos que apresentar a sua resolução no quadro não tiver um argumento estruturado dessa maneira. Nas alíneas de 1.1, abordar os seguintes tópicos: o valor de x em questão é ponto aderente ao domínio da função? Para onde tendem as imagens quando nos aproximamos de x= -3 (por exemplo) pela esquerda/direita desse valor ou por valores inferiores/superiores? Para que um limite não seja definível para um dado valor de x o que tem de acontecer? **Na questão 1.1.1**, abordar os seguintes tópicos: os valores -3, 4 e 3,5 são pontos aderentes ao domínio de f(x)? Então, isto significa que os três limites têm de existir ou que devem ser estudados nestes pontos? A tendência das imagens dos objeto/termos das sucessões que constituem as aproximações por valores superiores/inferiores de um valor x=a têm de ser iguais ao valor da imagem da função nesse ponto? Requerer dos alunos argumentos que sustentem as opções dos alunos relativamente à veracidade ou falsidade de cada alínea. **Na questão 1.2**, os alunos apenas têm de apresentar os valores da última linha de cada tabela e explicarem como procederam para registar os valores já referidos. Na questão 1.2.1, pedir aos alunos que expliquem o conceito de limite segundo Heine pelas próprias palavras. Requerer dos alunos a construção de um argumento que articule as	25 min

conjeturas dos alunos relativamente ao preenchimento das tabelas e à leitura do gráfico e apresente as conclusões retiradas de forma coerente e consistente.

Deixar a questão 1.3 para um segundo momento de trabalho autónomo já que esta questão coloca o aluno face a uma situação ainda não estudada e que exige que os alunos interpretem a definição de Heine e a apliquem a esta situação.

Levar ao quadro tanto os contraexemplos apresentados nas resoluções dos alunos como os erros encontrados na argumentação. Referir a eficácia normalmente atribuída á apresentação de contraexemplos na refutação de argumentos.

Tentar obter dos alunos um discurso claro e coerente dando eco a algumas das respostas dadas. Procurar que os dois alunos intervenham.

Durante este processo, promover a discussão e procurar outros intervenientes integrando algumas questões para o grupo turma*: Concordam todos com aquilo que foi apresentado ou explicado? Alguém tem algo a acrescentar? Alguém pensou de outra forma ou tem outra resposta? Querem colocar alguma questão aos vossos colegas? Alguma dúvida que os vossos colegas possam explicar?*

Por vezes pedir que um par explique porque usou estratégias diferentes dos colegas, por exemplo a partir do conhecimento de características da função, ou por procedimentos algébricos, ou com recursos a tabelas, etc.

Finalmente, com a ajuda dos alunos, tentar sintetizar as seguintes conclusões:

Quando nos referimos a todas as sucessões que tendem por valores do domínio de uma função para um valor aderente ao domínio da função e que também pertence ao domínio podemos dividi-las em três grupos de sucessões: $u_n \to a^- \; ou \; u_n \to a^+ ou \; u_n \to a$.

Se estudamos o comportamento de uma função a partir de uma sucessão convergente para um valor real *a* por valores do domínio da função iguais a esse valor, em que $u_n \to a$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = b$ então $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) = b$.

Num ponto isolado do domínio de uma função, o limite de f(x) quando x tende para a abcissa x=a desse ponto é igual à imagem de f (a).

Seja f uma função, real de variável real, e a um ponto aderente ao domínio D_f.

- Se $a \notin D_f$ e existirem e forem iguais os limites $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, então conclui-se que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
- Se $a \in D_f$ e existirem e forem iguais a $f(a)$ os limites $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, então conclui-se que: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$
- Se existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ então existem os limites laterais e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

Nota: Corrigir a última linha do resumo retirado do manual: **Apenas é verdade se os limites laterais puderem ser definidos, ou seja apenas existem limites laterais se *a* for aderente a $]\boldsymbol{a}, +\infty[\cap \boldsymbol{D_f}$ ou se for aderente a $]-\infty, \boldsymbol{a}[\cap \boldsymbol{D_f}$.**

Critérios de correção da Questão Aula

Questão 1:

	Opção A	Opção B	Opção C	Opção D
Razão da incorreção	$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$ Ou $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to5^+} h(x) = -2$	$\lim\limits_{x\to-1} h(x) = 0$	
Opção correta				**D**

60 min

Identificação da opção incorreta com razão bem indicada: +1,5 Pontos

Identificação da opção correta: +1,5 Pontos

Identificação da opção incorreta com razão incorreta: 0 Pontos **Identificação da opção incorreta com razão amais e incorreta: –0,75** **Identificação da opção incorreta com razão incorretamente apresentada:–0,5 ou –0,75** **Opção selecionada indevidamente porque aluno leu de forma incorreta o domínio, mas foi coerente com a apreciação (incorreta) dos valores da janela representada no enunciado: +0,75** **Questão 2:** **2.1) Cotação: 3 Pontos no total.** **Indicação de que existe limite mais valor correspondente ou indicação apenas do valor: +1,5 Pontos** **Justificação correta: +1,5 Pontos** **Justificação aproximadamente correta: Até +1 Ponto** **Se for apresentado um valor incorreto do limite, mas com justificação coerente: 1 ponto no total.** **Resolução possível:** $\lim_{x\to 3} f(x)$ *existe e* é *igual a* $\frac{1}{2}$**, porque, através da leitura do gráfico, verifica-se que para todas as aproximações de x=3 por valores do domínio desta função, as respetivas imagens tendem para** $\frac{1}{2}$ **(ou porque** $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3) = \frac{1}{2}$) **2.2) Cotação de cada alínea: 2 Pontos** **Resultados:** **2.2a) e 2.2b) –2 ; 2.2c) 3 ; 2.2d) 4** **2.3) Cotação: 3 Pontos** **Estrutura argumentativa ajustada a uma demonstração (apresentar dados de onde parto e a conclusão que posso deles tirar, mais as garantias – propriedades, teoremas, definições, regras, etc– em que me baseio para poder passar da leitura dos dados para a conclusão): Entre 2 e 3 Pontos** **Estrutura argumentativa aproximada (apresentar dados de onde parto e a conclusão que posso deles tirar, mas sem revelar as garantias explicitamente): Entre 1 e 2** **Estrutura argumentativa incompleta, muito confusa ou com apresentação incorreta dos dados: Até 1 Ponto.** **Resolução Possível: Dado que existem pelo menos duas sucessões que tendem para -2 por valores do domínio de f(x) tais que** $\lim f(u_n) \neq \lim f(v_n)$**, então, com base na definição de limite de uma função segundo Heine, não existe** $\lim_{x\to -2} f(x)$**.** **Outra resolução: Dado que** $-2 \in D_f$ **, então só existiria** $\lim_{x\to -2} f(x)$ **se e só se** $\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^+} f(x) = f(-2)$**, o que não acontece pois** $\lim_{x\to -2^-} f(x) = f(-2) = 4$ mas $\lim_{x\to -2^+} f(x) = 3$.	

Avaliação
Avaliação qualitativa de atitudes e valores a partir da observação dos alunos em aspetos como: - Colaboração entre colegas, empenho e respeito pelas intervenções dos colegas e professor; - Diálogo com os alunos e professor (participação e pertinência das questões levantadas e das respostas dadas); Realização de um instrumento de avaliação com fins reguladores e sumativos: - Os alunos podem consultar as sistematizações e o manual. - Avaliar as aprendizagens evidenciadas.

Anexo II: Tarefas de exploração

Tarefa 1

Escola Secundária de Camões
2018/2019

Matemática A

Turma:

Nome:

Tarefa: Limites no infinito de funções reais de variável real.

1. Sejam f, g e h três funções reais de variável real, com as seguintes expressões algébricas:

$$f(x)=\frac{10-x}{2};\quad g(x)=\frac{x^2-1}{x};\quad h(x)=\frac{x+1}{x^2-1}$$

Indique o valor lógico das afirmações matemáticas apresentadas nas alíneas seguintes e justifique as suas opções.

a₁) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ V: ☐ F: ☐

a₂) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ V: ☐ F: ☐

Justificação:

b₁) $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ V: ☐ F: ☐

b₂) $\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ V: ☐ F: ☐

Justificação:

c₁) $\lim_{x\to+\infty} h(x)=0$ V: ☐ F: ☐

c₂) $\lim_{x\to-\infty} h(x)=0$ V: ☐ F: ☐

Justificação:

2. Em cada uma das alíneas, esboce o gráfico de uma função real de variável real que respeite os limites apresentados:

a) $\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty \quad e \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty \quad e \lim_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$

c) $\lim_{x \to -\infty} i(x) = 1 \quad e \lim_{x \to +\infty} i(x) = 1$

2.1) Tomando em consideração os limites das alíneas anteriores, comente as seguintes afirmações, indicando o valor lógico de cada afirmação e a respetiva justificação:

a) A função $g(x)$ pode ser uma função polinomial de grau 3.

b) A função $h(x)$ não pode ser uma função quadrática.

c) A função $i(x)$ pode ser uma função racional definida pela expressão algébrica $\frac{1-x}{x}$.

3. A partir de uma representação das funções o que pode afirmar sobre os limites das funções apresentados nas alíneas seguintes? Justifique a sua resposta.

a) $\lim_{x \to +\infty} [4000 - (x - 10500)^2]$

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sin(2x)}$

c) $\lim_{x \to -\infty} \frac{\cos(2x)}{x}$

Tarefa 2

Escola Secundária de Camões
2018/2019
Matemática A

Turma:

Nome:

Tarefa: Vamos investigar a definição de limite segundo Heine.

Definição de limite de uma função num ponto (segundo Heine)

Sejam f uma função real de variável real de domínio D_f, $a \in \mathbb{R}$ um ponto aderente a D_f e $b \in \mathbb{R}$.

Diz-se que b **é o limite de** $f(x)$ **quando** x **tende para** a quando, para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f convergente para a, se tem $\lim f(x_n) = b$.

Nas mesmas condições, diz-se também que $f(x)$ **tende para** b **quando** x **tende para** a e utiliza-se a notação $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

1. Considere as sucessões (u_n) e (v_n) definidas pelos termos gerais:

$$u_n = 2 + \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad v_n = 2 - \frac{10}{n^2}$$

1.1. Complete a tabela seguinte e identifique o limite das sucessões (u_n) e (v_n):

n	u_n		n	v_n
1	3		1	
5			5	
10			10	1,9
50			50	
100			100	
1000			1000	
$n \to +\infty$			$n \to +\infty$	

2. Além das sucessões (u_n) e (v_n) da questão 1, considere a função real de variável real definida pela expressão algébrica:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2}$$

2.1. Complete a tabela seguinte:

n	u_n	$f(u_n)$		n	v_n	$f(v_n)$
1	3	5		1		
5				5		
10				10	1,9	2,8
50				50		
100				100		
1000				1000		
$n \to +\infty$				$n \to +\infty$		

2.1.1. Conjeture qual deve ser o valor do limite de cada uma das sucessões $f(u_n)$ e $f(v_n)$, apresentando os argumentos em que se baseia.

2.1.2. Construa um argumento com estrutura semelhante à que é apresentada na **sugestão**, de forma a justificar se concorda, ou não, com a afirmação:

A partir da definição de limite segundo Heine, posso garantir que $\lim_{x \to 2} f(x) \neq 3$.

Sugestão:

Dado que (apresentar factos, resultados, etc.)**, então** (concordo/ não concordo que $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$)**, porque,** (apresentar teorema, definição, etc., que justifique a análise dos factos, resultados, etc., em concordância, ou não, com a afirmação).

3. Além das sucessões (u_n) e (v_n) da questão 1, considere agora a função real de variável real definida pela expressão algébrica:

$$g(x) = \frac{x^2 - x - 4}{x - 2}$$

3.1. Complete a tabela seguinte:

n	u_n	$g(u_n)$		n	v_n	$g(v_n)$
1	3	2		1		
5				5		
10				10	1,9	22,9
50				50		
100				100		
1000				1000		
$n \to +\infty$						

3.1.1. Conjeture qual deve ser o valor do limite de cada uma das sucessões $g(u_n)$ e $g(v_n)$, apresentando os argumentos em que se baseia.

3.1.2. Mostre, construindo um argumento com estrutura semelhante à da questão 2.1.2, que $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$ não existe.

Tarefa 3

Escola Secundária de Camões
2018/2019

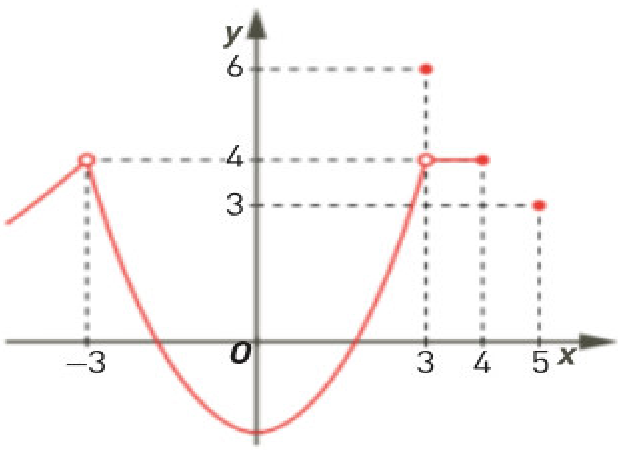
Matemática A

Turma:

Nome:

Tarefa: Limite num ponto aderente ao domínio de uma função real de variável real.

1. Seja $f(x)$ uma função com $D_f =]-\infty, -3[\cup]-3, 4] \cup \{5\}$, cujo gráfico é representado no referencial da figura abaixo:



1.1. Quando for possível, determine os limites indicados nas alíneas seguintes. Se concluir que o limite não pode ser estudado, explique porquê utilizando uma estrutura argumentativa semelhante à sugerida: **Dado que** <u>(explicar factos),</u> **então** <u>o limite não pode ser estudado</u> (conclusão), **porque** <u>(justificar apresentando em que baseia tal raciocínio)</u>.

a) $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) =$_____ b) $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) =$_____ c) $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) =$_____

d) $\lim\limits_{x \to 3{,}5^-} f(x) =$_____ e) $\lim\limits_{x \to 3{,}5^+} f(x) =$_____ f) $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) =$_____

1.1.1. Comente se concorda, ou não, com a existência e com os valores dos limites indicados nas alíneas seguintes. No seu comentário, apresente argumentos que suportem o seu ponto de vista.

a) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = 4$

b) $\lim\limits_{x \to 3{,}5} f(x) = 3{,}5$

c) $\lim\limits_{x \to 4} f(x) =$ não existe.

1.2. Considere que a função $f(x)$ pode ser representada pela expressão algébrica:

$$f(x) = \begin{cases} x + 7, & x < -3 \\ \frac{2}{3}x^2 - 2, & -3 < x < 3 \\ 6, & x = 3 \\ 4, & 3 < x \leq 4 \\ 3, & x = 5 \end{cases}$$

Sejam (u_n), (v_n), (w_n) sucessões com termos gerais $u_n = 3 - \frac{3}{n}$, $v_n = 3 + \frac{1}{n}$ e $w_n = 3$. Complete as tabelas seguintes com os valores adequados.

n	u_n	$f(u_n)$
1		-2
10		
100	2,97	

1000		
10000		
$n \to +\infty$		

n	v_n	$f(v_n)$
1	4	
10		
100		4
1000		
10000		
$n \to +\infty$		

n	w_n	$f(w_n)$
1		
10		
100	3	6
1000		
10000		
$n \to +\infty$		

1.2.1. Tomando em consideração a última linha de cada tabela e a definição de limite segundo Heine, que conjeturas pode formar sobre a existência e o valor dos limites seguintes:

$a)\ \lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ $b)\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ $c)\ \lim\limits_{x \to 3} f(x).$

1.3. Avalie como verdadeiro ou falso os seguintes argumentos e indique os erros detetados ou apresente um contraexemplo que refute cada argumento avaliado como falso.

A) Dado que todas as sucessões que tendem para 5 por valores do domínio de $f(x)$ são sucessões cujo termo geral pode ser representado por $u_n = 5$, então o limite de $f(x)$ existe quando x tende para 5, com base na definição de limite.

B) Dado que não existem os limites laterais $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$, então $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$ não existe, pois a existência de $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$ depende apenas da existência e igualdade dos limites laterais, ou seja, se $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$ então $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$.

Questão aula

Escola Secundária de Camões
2018/2019

Matemática A

Turma:

Nome:

Questão aula: Problemas com limites

Questão 1:

O gráfico de uma função $h(x)$ respeita as seguintes indicações:

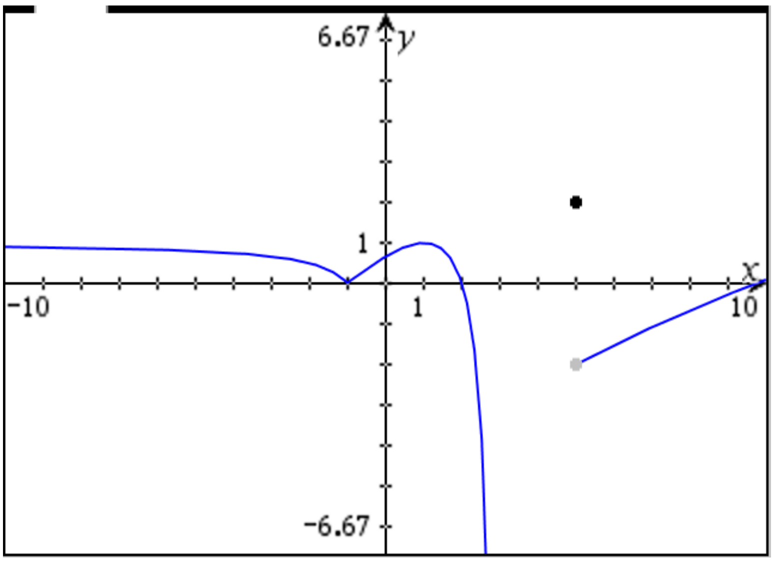
$D_h =]-\infty, 3[\cup [5, +\infty[$ $\quad \lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x \to -1} h(x) = 0$

$\lim_{x \to 3^-} h(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x \to 5^+} h(x) = -2$ $\quad h(5) = 2$ $\quad \lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$

Apenas um dos gráficos representados nas opções de A a D traduz todas as indicações fornecidas sobre a função $h(x)$.

Identifica a opção correspondente ao gráfico de $h(x)$ e, relativamente a cada uma das outras opções, apresenta pelo menos uma razão para rejeitar a respetiva representação gráfica.

Opção A:

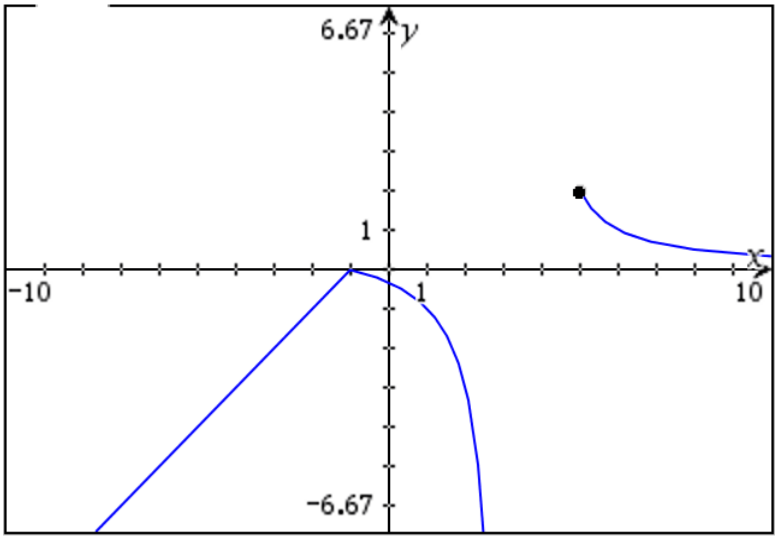


Legenda:

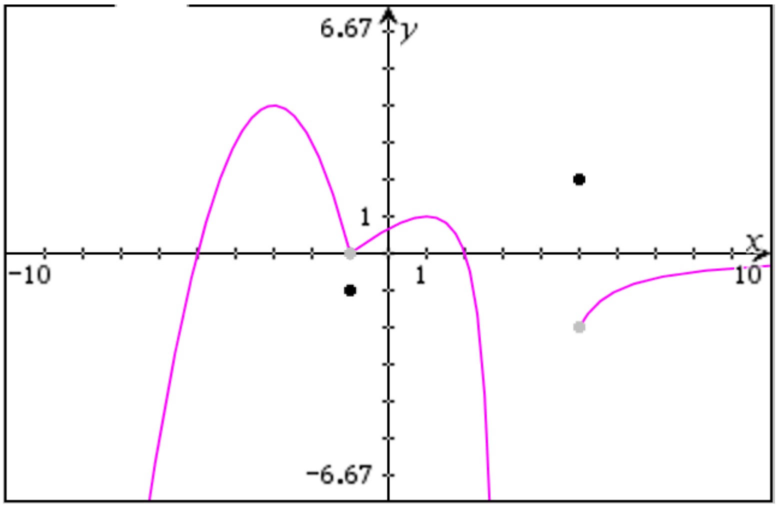
Bola cinzenta = bola aberta;

Bola preta= Bola fechada.

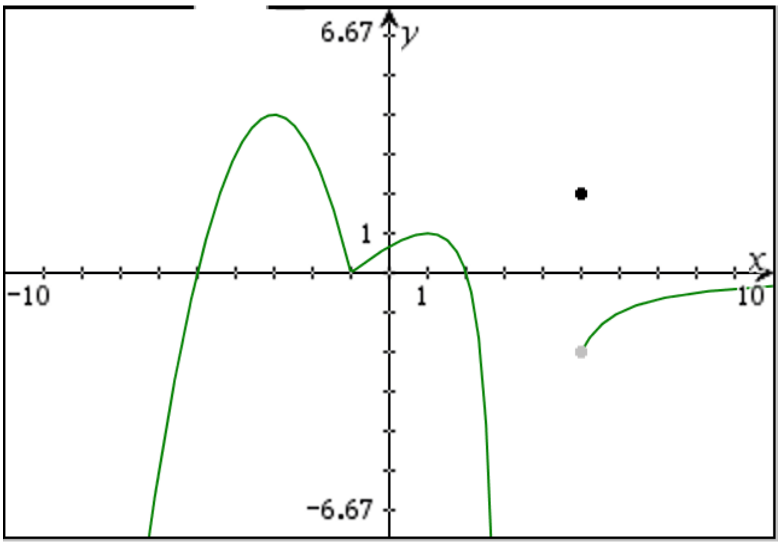
Opção B:



Opção C:



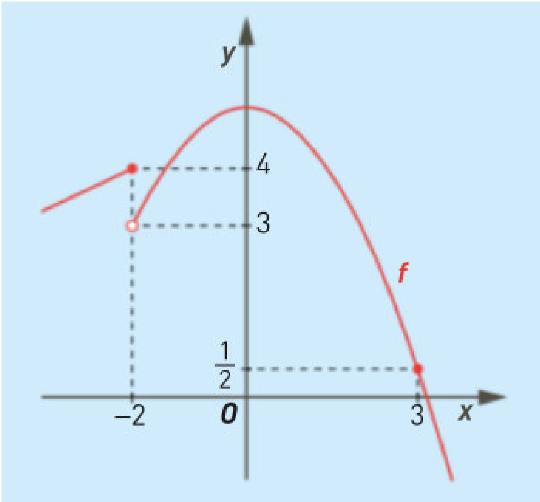
Opção D:



Questão 2:

No referencial da figura está representada graficamente uma função *f*.

2.1. Mostra que existe $\lim_{x \to 3} f(x)$ e indica o seu valor.



2.2. Considera as sucessões com os seguintes termos gerais:

$u_n = \frac{-2n+1}{n}$ e $v_n = -2 - \frac{1}{n^2}$

Indica os valores dos seguintes limites:

a) $\lim u_n$ c) $\lim f(u_n)$

b) $\lim v_n$ d) $\lim f(v_n)$

2.3. Mostra que não existe $\lim_{x \to -2} f(x)$.

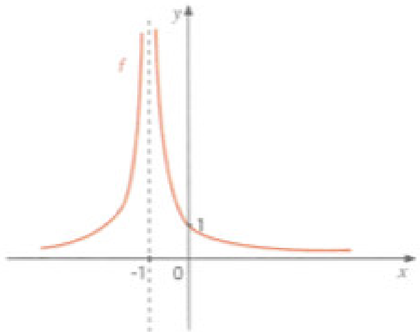
Tarefa 4

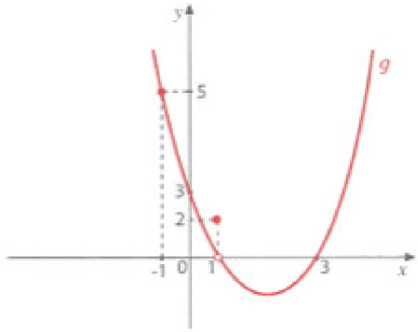
Escola Secundária de Camões
2018/2019
Matemática A

Nome: ____

Operações com limites

1. Sejam as funções f e g representadas graficamente por:





1.1) Indica o valor de:

a) $\lim\limits_{x\to 0}(f-g)(x)$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty}(f-g)(x)$ e) $\lim\limits_{x\to -1}(f\times g)(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-\frac{10}{\sqrt{f}}\right)(x)$ d) $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ f) $\lim\limits_{x\to -1^-}\left(\frac{g}{f}\right)(x)$

1.2) "O $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ não existe". Conclui, justificando, se a afirmação é falsa ou verdadeira.

2. Sejam *f*, *g*, e *h* três funções reais de variável real tais que:

$$f(x)=\frac{x}{4-x^2} \qquad g(x)=\frac{x-2}{2x} \qquad h(x)=-4x+8$$

Determina:

a) $\lim\limits_{x\to 0^-}\left[\frac{x}{4-x^2}\times(-4x+8)-\frac{x-2}{2x}\right]$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^2-2x}{-2x^3+8x}$

3. Sejam *f* e *g* duas funções reais de variável real, identifica se são falsas ou verdadeiras as seguintes afirmações. Nas falsas, apresenta um contraexemplo de forma a provar a sua falsidade.

a) Quando $x\to a$, $a\in\mathbb{R}$, o limite da divisão de duas funções $\frac{f}{g}$ não existe sempre que $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$.

b) Se *f* e *g* são duas funções polinomiais com o mesmo grau, em que os coeficientes dos termos de maior grau são iguais, então $\lim\limits_{x\to +\infty}(f-g)=0$.

c) Se *f* e *g* são funções polinomiais em que o grau de *f* é maior que o grau de g, então $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\pm\infty$ e $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(\frac{g}{f}\right)(x)=0$.

d) Se $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, então o limite de $\frac{1}{f}$ existe **necessariamente**, com o resultado igual a $+\infty$ ou $-\infty$.

Anexos III: Gráficos usados nas introduções às tarefas

Gráfico 1: 1ª aula

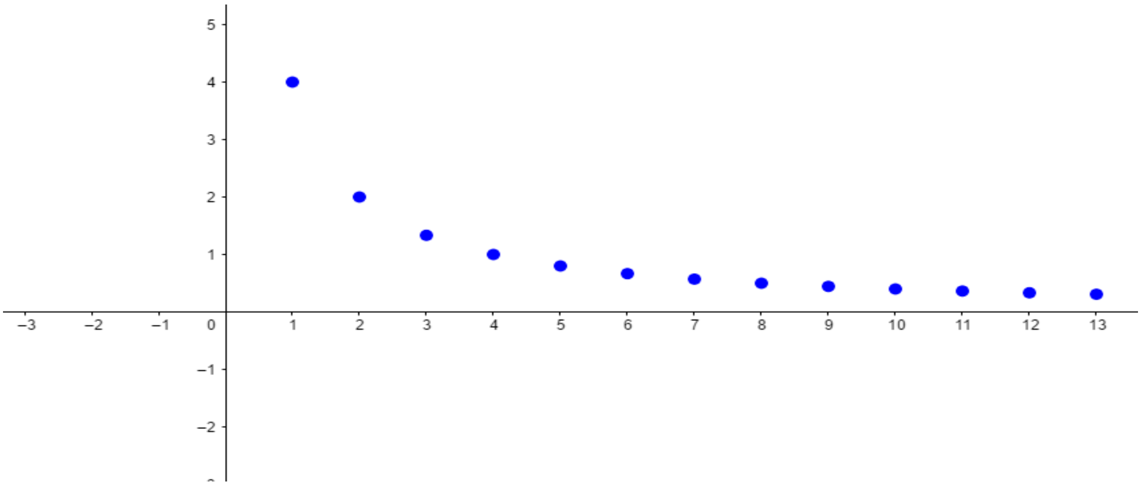


Gráfico 2: 1º aula

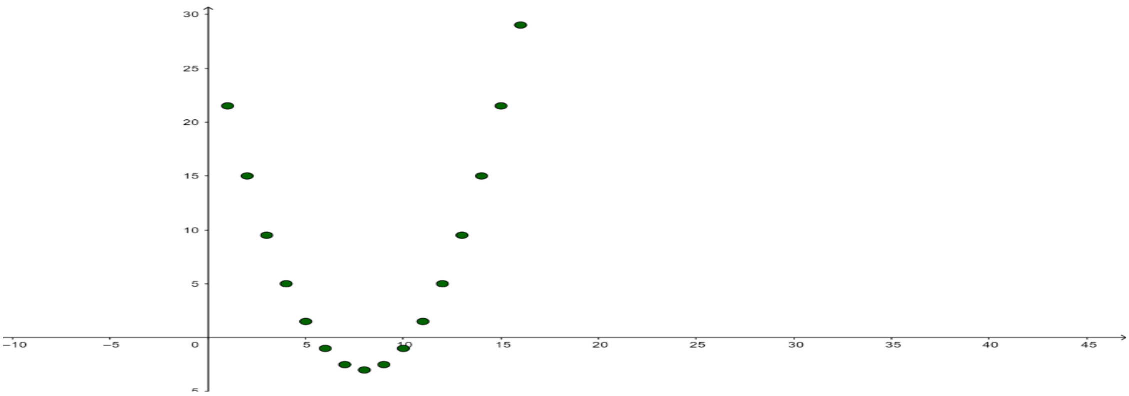


Gráfico 3: 1ª aula

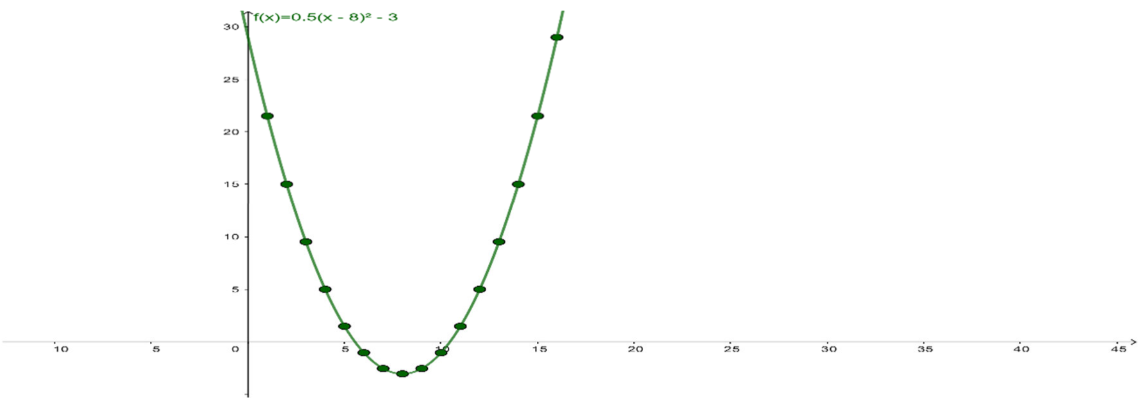


Gráfico 4: 1ª aula

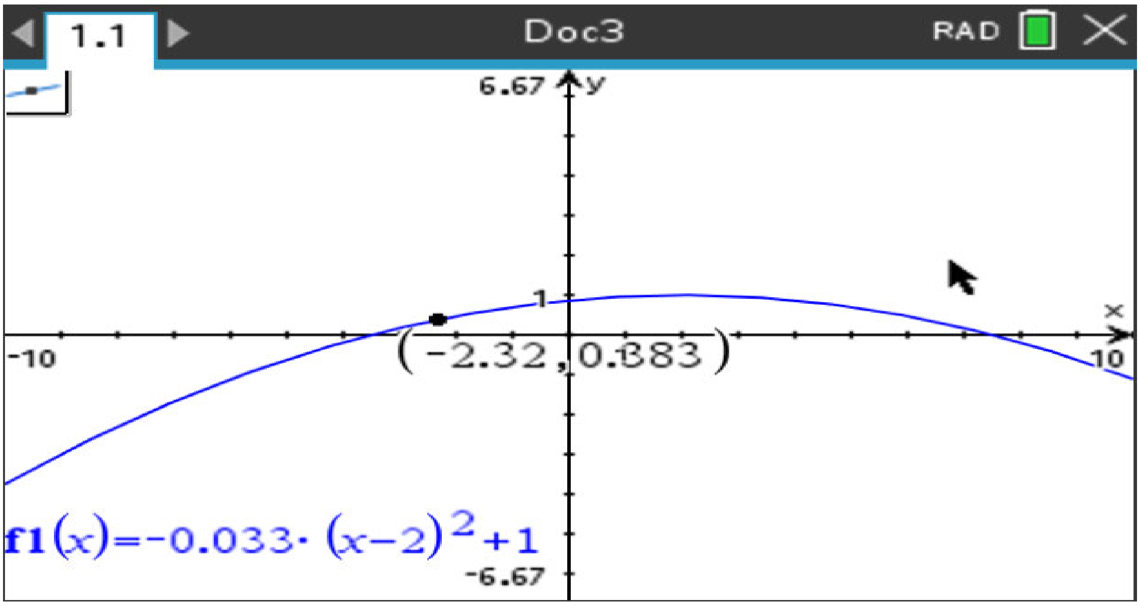


Gráfico 5: 1ª aula

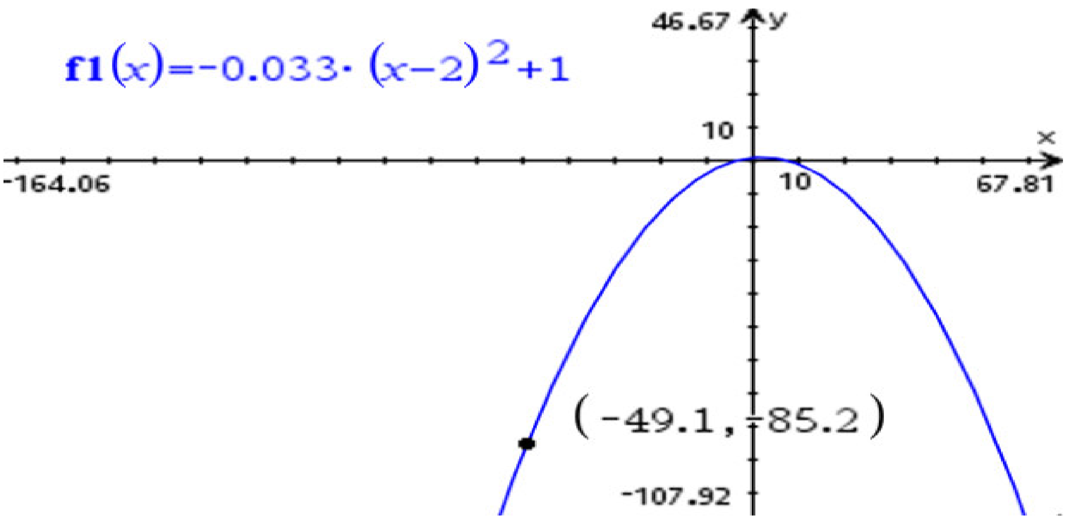


Gráfico 6: 2ª aula

Sucessão U_n é representada pelos pontos verdes e à medida que $U_n \rightarrow 4^+$, o ponto B desloca-se pelos pontos verdes e o ponto D aproxima-se de 4.

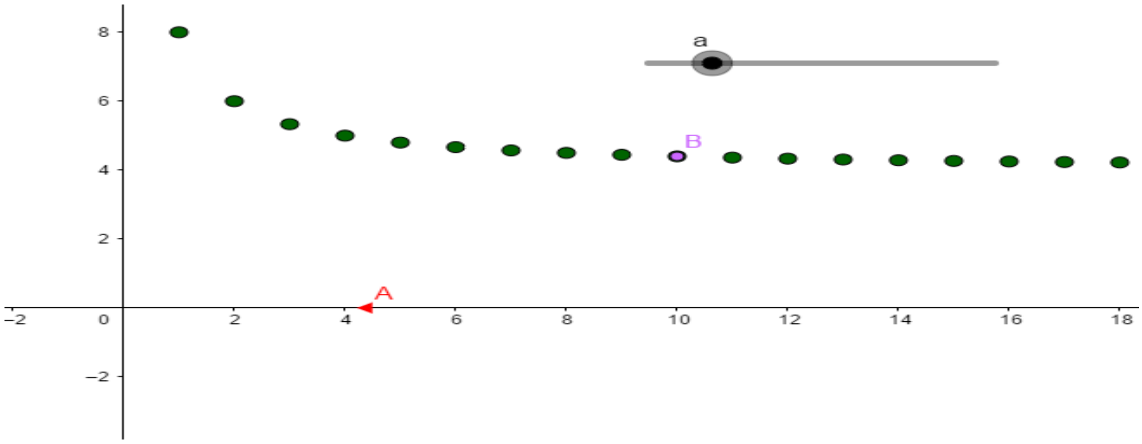


Gráfico 7: 2ª aula

Sucessão V_n é representada pelos pontos verdes e à medida que $V_n \rightarrow 4^-$ o ponto C desloca-se pelos pontos verdes e o ponto D aproxima-se de 4.

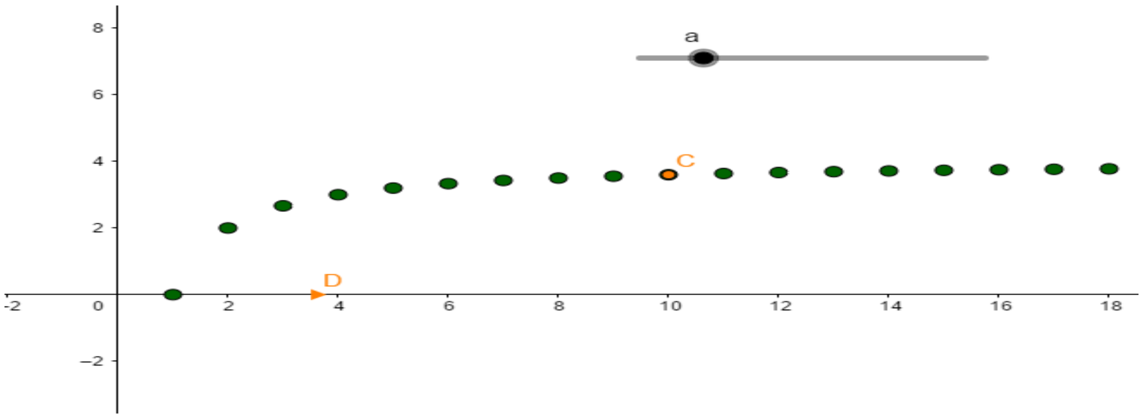


Gráfico 8: 2ª aula

Sucessão W_n é representada pelos pontos verdes e à medida que $W_n = 4$ o ponto I desloca-se pelos pontos verdes e o ponto J não sai de 4.

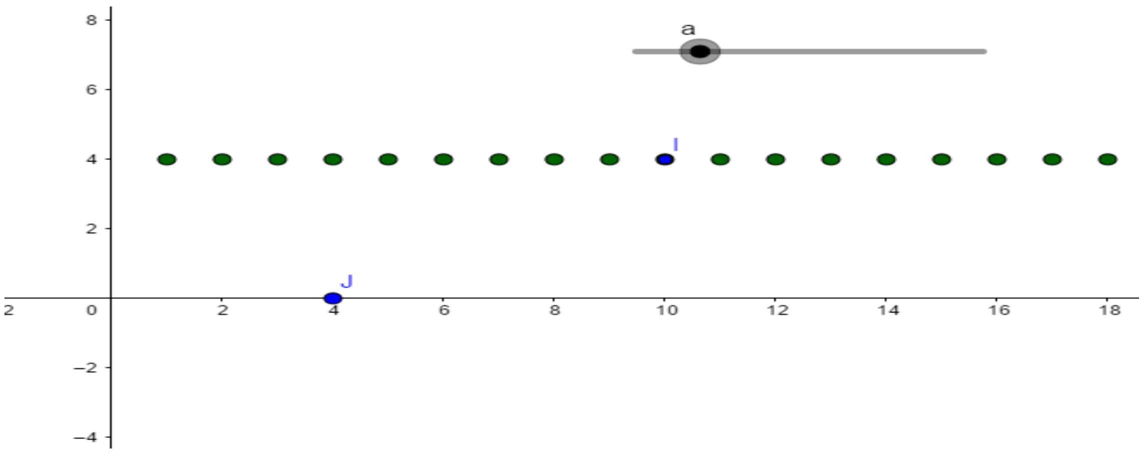


Gráfico 9: 2ª aula

Ponto F desloca-se ao longo do gráfico de f(x) à medida que ponto A se aproxima de 4.

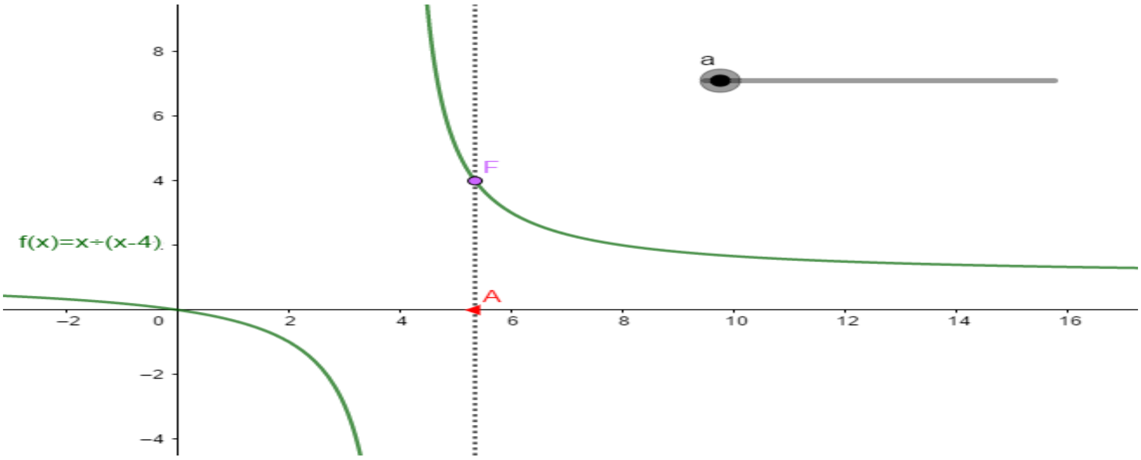


Gráfico 10: 2ª aula

À medida que ponto A se aproxima de 4, o ponto F sobe para $+\infty$.

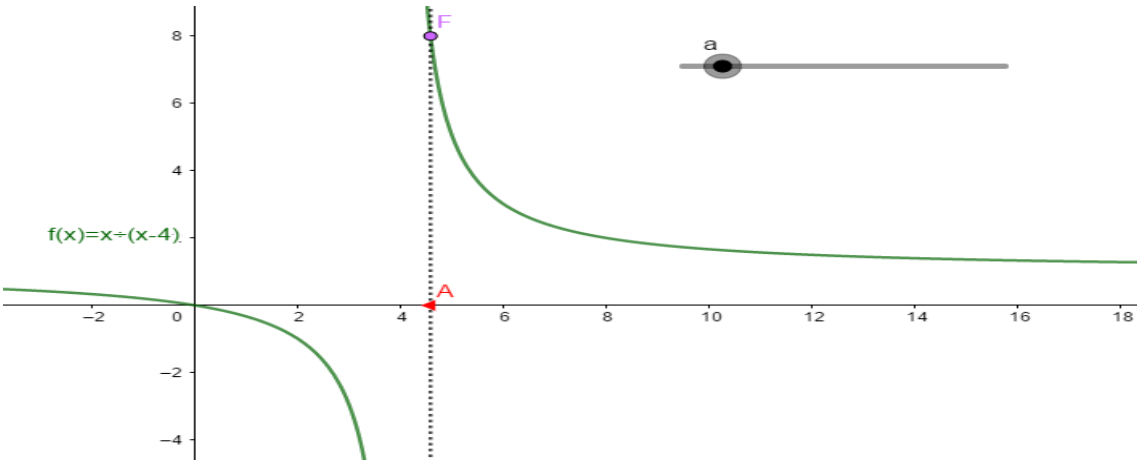


Gráfico 11: 2º aula

Ponto B desloca-se segundo $u_n \to 4^+$, fazendo com que ponto A se aproxime de 4 e ponto F tenda para $+\infty$.

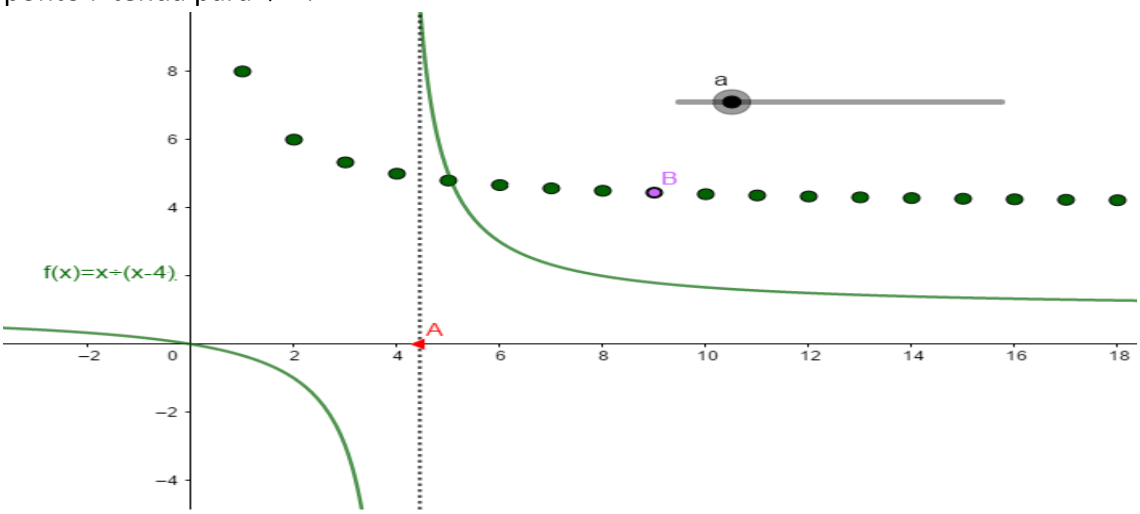


Gráfico 12: 2ª aula

A aproximação de D para 4 por valores à esquerda (pontos laranja) "leva" o ponto E para $-\infty$; a aproximação de A para 4 à direita (pontos azuis) "leva" o ponto F para $+\infty$.